БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА
МАТЕМАТИКА

А. Гейтинг

ИНТУИЦИОНИЗМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

INTUITIONISM

An introduction

A. HEYTING

Professor of Mathematics
University of Amsterdam

1956

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY

AMSTERDAM

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

А. ГЕЙТИНГ

ИНТУИЦИОНИЗМ

Введение

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
В. А. ЯНКОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С КОММЕНТАРИЯМИ
А. А. МАРКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1965

УДК 517.12

Книга А. Гейтинга является монографией по основаниям математики. Вопросы оснований математики (теория математического доказательства, проблема существования в математике) рассматриваются в ней с точки зрения интуиционизма — течения в математике, видным представителем которого является автор.

Книга написана в форме живой беседы между представителями различных точек зрения на основания математики. К этой живой беседе присоединяется и редактор книги А. А. Марков, представитель не затронутого автором направления. В своих комментариях редактор не только вводит нового собеседника, но также стремится устранить неточности, допущенные автором.

Книга рассчитана на очень широкий круг читателей, начиная от математиков всех специальностей и кончая всеми, интересующимися математической логикой и философскими проблемами естествознания.

Редакция литературы по математическим наукам

ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателя книга Гейтинга посвящена систематическому изложению интуиционизма — направления в математике, возникшего в начале нашего века благодаря работам Брауэра, Вейля и автора книги. Хотя взгляды интуиционистов полностью разделяются сейчас лишь очень немногими математиками, глубоко неправы те, кто видит в интуиционизме лишь некий «курьез» (ср. Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, ИЛ, М., 1963, 53). Дело в том, что многие из этих взглядов были восприняты и усвоены математиками конструктивного направления, не удовлетворенными господствующим в настоящее время «теоретико-множественным образом мышления». Эти математики разделяют, в частности, критическое отношение интуиционистов к закону исключенного третьего.

Уже поэтому весьма неразумно относить интуиционизм к разряду курьезов. Редактор перевода, будучи сам представителем конструктивного направления в математике, видел свою главную задачу в сопоставлении точек зрения интуиционизма и конструктивизма. Этому сопоставлению посвящено большинство примечаний редактора в конце книги. В соответствии с непринужденной диалогической формой изложения автора редактор вводит в своих комментариях еще одного участника диалога — Кона, излагающего взгляды конструктивистов.

А. Марков

ПРЕДИСЛОВИЕ

С целью избавить читателя от потери времени в бесплодных попытках разрешить предполагаемые загадки, я предупреждаю его, что действующие лица диалога не являются ни карикатурами на живущих или живших людей, ни их двойниками. Это только крючки для развешивания идей и больше ничего. До известной степени это верно даже для **Инта**, выражающего позицию интуиционизма. Для ясности я заставлял его порою говорить категоричнее, чем говорил бы я сам, если бы свободно выражал свое собственное мнение. Дискуссия строго ограничивается интуиционизмом; другие концепции математики затрагиваются лишь постольку, поскольку они включают в себя возражения против интуиционизма. Я отклоняю всякий упрек в неполном представлении других точек зрения.

В ходе изложения оказалось необходимым давать подробные доказательства даже там, где они отличаются от хорошо известных классических доказательств только небольшими дополнениями, поскольку не существует никакого удобного способа указать, в какие именно места нужно вставлять эти дополнения. По мере накопления материала я постепенно применял все более сжатый стиль, в предположении, что у читателя развилось понимание специфически интуиционистских трудностей.

Выражаю искреннюю благодарность всем, кто своим участием помог совершенствованию этой книги, в частности д-ру П. Гилмору, проф. Л. Хенкину и В. Тэйту, прочитавшим части рукописи и предложившим многие стилистические поправки, а также И. И. де Ионгу и Ф. ван де Оудеветерингу, которые тщательно просмотрели рукопись. Де Ионгу книга обязана многими исправлениями и улучшениями.

Во многих местах книги читатель найдет старомодные рассуждения, которым недостает общности и которые более топорны, чем современные методы. На это имеются различные причины. Во-первых, мощные методы слишком часто прибегают к косвенным доказательствам, так что их

почти невозможно ввести в интуиционистскую математику. Во-вторых, наиболее общие современные теории развиваются при помощи аксиоматического метода. А этот метод хорошо работает только в том случае, когда существуют конкретные теории, из которых при помощи обобщения можно построить аксиоматическую теорию. Например, общую топологию можно было развить только после того, как топология евклидовых пространств до некоторой степени была уже известна. Фактически почти ни одна часть интуиционистской математики не исследована настолько глубоко, чтобы было возможно построение общей аксиоматической теории. В частности, в этой книге я должен был ограничиться наиболее элементарным случаем интегрирования; когда эта область будет известна лучше, чем в настоящее время, станет возможным построить аксиоматическую теорию предмета. Даже в случае алгебры, где аксиоматизация возможна и в настоящее время, в силу вводного характера книги представлялось лучшим иметь дело с конкретным примером поля действительных чисел.

Возможно, что в некоторых случаях я использовал устарелые методы, потому что не знаю современных. Одна из целей этой книги — помочь работающим математикам разобраться в том, какой из их результатов можно доказать интуиционистски. Интуиционизм может процветать только тогда, когда математики, работающие в различных областях, будут активно интересоваться им и вносить в него свои вклады. Чтобы построить определенную ветвь интуиционистской математики, нужно, во-первых, обладать основательным знанием соответствующей ветви классической математики и, во-вторых, из опыта знать, где лежат интуиционистские ловушки. В этой книге я стараюсь научить последнему; я надеюсь, что найдутся читатели, которые успешнее справятся с деталями теории, чем это удалось мне, и которые дадут интуиционистскую трактовку других отделов математики. «Рекомендации читателям» имеют целью помочь им; в них указаны наиболее важные интуиционистские труды в некоторых специальных областях.

Система ссылок построена следующим образом:

«Теор. 2» отсылает к теореме 2 того же раздела;

«Опр. 2» отсылает к определению 2 того же раздела;

«Теор. 2 из 6.2.1» отсылает к теореме 2 из раздела 6. 2. 1.

А. Гейтинг

Действующие лица диалога:
Класс, Форм, Инт, Букв, Прагм, Сигн [1] *)

I. ДИСПУТ

Класс. Как дела, господин **Инт**? Вы не отправились за город в такой прекрасный летний день?

Инт. У меня возникло несколько мыслей, и я продумывал их в библиотеке.

Класс. Трудолюбивая пчела! Как вы поживаете?

Инт. Неплохо. Не выпить ли по рюмке?

Класс. Благодарю вас. Бьюсь об заклад, что вы работали над своим коньком — отказом от исключенного третьего и тому подобным. Никак не пойму, почему на логику следует полагаться где угодно, только не в математике.

Инт. Мы уже говорили на эту тему. Мысль о том, что для описания некоторых родов объектов другая логика может оказаться более подходящей, чем обычная, обсуждалась время от времени и до интуиционизма. Но только Брауэр первым открыл объект, который действительно требует иной формы логики. Этот объект — умственное математическое построение [Брауэр, 1908]. Причина в том, что в математике мы с самого начала имеем дело с бесконечным, в то время как обычная логика создана для рассуждений о конечных совокупностях [2].

Класс. Я знаю, но, по-моему, логика универсальна и применяется как к бесконечному, так и к конечному.

Инт. Вы должны понять, в чем заключалась программа Брауэра [Брауэр, 1907]. Она состояла в исследовании умственного математического построения как такового, безотносительно к таким вопросам о природе конструируемых объектов, как вопрос, существуют ли эти

* Комментарии редактора перевода, помеченные цифрами, см. на стр. 161. — *Прим.ред.*

объекты независимо от нашего знания о них. То, что эта точка зрения ведет непосредственно к отказу от принципа исключенного третьего, я могу лучше всего продемонстрировать на следующем примере.

Сравним два приведенных ниже определения натуральных чисел — числа k и числа l.

I. k есть наибольшее простое число, такое, что $k - 1$ также простое; если же такого числа не существует, то $k = 1$.

II. l есть наибольшее простое число, такое, что $l - 2$ также простое; если же такого числа не существует, то $l = 1$.

Классическая математика совсем не принимает во внимание очевидного различия в характере этих двух определений. k может быть вычислено ($k = 3$), в то время как у нас нет способа вычисления l, так как неизвестно, конечна ли последовательность пар так называемых «близнецов», т. е. простых чисел вида p и $p + 2$. Поэтому интуиционисты отвергают II как определение натурального числа; они считают, что число действительно определено только тогда, когда дан способ его вычисления. Развивая эту мысль, мы приходим к отказу от принципа исключенного третьего, ибо если бы последовательность пар «близнецов» была конечной или бесконечной, то II определяло бы натуральное число.

Класс. Можно возразить, что состояние нашего знания о существовании или несуществовании последней пары «близнецов» зависит от случайных обстоятельств и не имеет никакого отношения к вопросу математической истинности. Либо существует бесконечное число пар «близнецов», и тогда $l = 1$, либо их число конечно, и тогда l равно наибольшему из таких простых чисел l, что l и $l - 2$ образуют пару «близнецов». В любом постижимом случае l определено; какое имеет значение, можем ли мы его действительно вычислить?

Инт. Ваш аргумент по своей природе является метафизическим. Если слово «существовать» не означает «быть построенным», то оно должно иметь какое-то метафизическое значение. Задача математики не в том, чтобы исследовать это значение и решать, годится ли оно. Мы не возражаем, если какой-нибудь математик лично придерживается импонирующей ему метафизической теории, но программа Брауэра требует, чтобы мы изучали математику

как нечто более простое и непосредственное, чем метафизика. В изучении умственных математических построений «существовать» должно означать то же самое, что «быть построенным».

Класс. То есть пока мы не знаем, существует ли последняя пара «близнецов», II не будет определением натурального числа, но когда эта проблема будет решена, то II внезапно станет определением. Предположим, что 1 января 1970 года будет доказана бесконечность множества «близнецов»; тогда с этого момента $l = 1$. Было ли $l = 1$ до этой даты или нет? [Менгер, 1930].

Инт. Математическое высказывание утверждает тот факт, что было выполнено некоторое математическое построение. Ясно, что перед тем, как построение было сделано, оно еще не было сделано. Применяя это замечание к вашему примеру, мы видим, что до 1 января 1970 года равенство $l = 1$ еще не было доказано. Но это не то, что вы имеете в виду. Мне кажется, что вам нужно вернуться к метафизическим понятиям, чтобы сделать ясным смысл вашего вопроса, т. е. к некоторому миру математических вещей, существующих независимо от нашего познания, где $l = 1$ — истина в каком-то абсолютном смысле. Но я повторяю, что математика не должна зависеть от таких понятий, как эти. В действительности все математики, даже интуиционисты, убеждены, что в каком-то смысле математика имеет отношение к вечным истинам, но когда пытаешься уточнить, в каком именно смысле, то оказываешься втянутым в хаос метафизических трудностей. Единственный способ избежать этого заключается в том, чтобы изгнать эти трудности из математики. Именно это я и имею в виду, когда говорю, что мы изучаем математические построения, как таковые, и что классическая логика не годится для этого изучения [3].

Класс. Сюда идут наши друзья **Форм** и **Букв**. Коллеги, у нас здесь в высшей степени интересная дискуссия об интуиционизме.

Букв. Разве можно говорить о чем-нибудь другом с добрым старым **Интом**? Он совершенно поглощен этой темой.

Инт. Если вас когда-либо поразила красота предмета, то посвящайте ему свою жизнь!

Форм. Очень хорошо! Только я удивлюсь, какая может быть красота в такой неопределенной вещи, как интуицио-

низм. Ни один из ваших терминов не определен как следует, у вас нет точных правил вывода. Поэтому никогда нельзя будет решить, какие из ваших рассуждений правильны, какие — нет [Карнап, 1934, стр. 41; 1937, стр. 46], [Дубислав, 1932, стр. 57, 75].

В обыденном разговоре ни одно слово не имеет прочно закрепленного смысла; всегда остается место для свободной игры воображения, тем большее, чем абстрактнее понятие. Поэтому люди недопонимают друг друга, и это же происходит в неформализованных математических рассуждениях. Единственный способ добиться абсолютной строгости состоит в том, чтобы очистить математические рассуждения от всякого смысла и рассматривать их сами по себе, как последовательности знаков, не обращая внимание на значение, которое они могут выразить. Тогда возможно сформулировать точные правила для выведения новых утверждений из утверждений уже известных и избежать неопределенности, получающейся из-за многозначности языка.

Инт. Мне кажется, что различие между формалистами и интуиционистами является главным образом различием вкуса. Вы также используете осмысленные рассуждения в той теории, которую Гильберт называет метаматематикой, но вы ставите себе целью отделить их от чисто формальной математики и ограничиться поэтому как можно более простыми рассуждениями. Мы же в противоположность этому заинтересованы не в формальной стороне математики, а именно в том типе рассуждений, которые применяются в метаматематике; мы стараемся проследить его до самых далеких следствий. Это предпочтение проистекает из убеждения, что мы здесь имеем дело с одной из самых основных способностей человеческого разума.

Форм. Если вы не будете ссориться с формализмом, то и я не буду ссориться с интуиционизмом. Формалисты принадлежат к самой мирной части человечества. Любая теория может быть формализована и тогда станет предметом для наших методов. Также и интуиционистскую математику можно трактовать таким образом, и это будет сделано [Карнап, 1934, стр. 44; 1937, стр. 51].

Класс. То есть интуиционистскую математику нужно изучать как часть математики. В математике мы исследуем следствия данных допущений; интуиционистские допущения могут и быть интересными, но у них нет никакого права на монополию.

Инт. Мы и не претендуем на это: мы удовлетворимся, если вы признаете за нашей концепцией ее правомочность. Но я должен отвергнуть утверждение, что интуиционизм исходит из определенных, более или менее произвольных допущений. Его предмет — конструктивная математическая мысль — однозначно определяет его посылки и помещает его не внутри классической математики, а рядом с ней. Последняя изучает совсем другой предмет, чем бы он ни являлся. По этой же причине соглашение между формализмом и интуиционизмом посредством формализации интуиционистской математики также является невозможным. Конечно, верно, что и в интуиционистской математике законченную часть теории можно формализовать. Нужно, однако, разобраться, в чем смысл такой формализации. Мы можем рассматривать формальную систему как лингвистическое выражение математической мысли в некотором специальном подходящем языке.

Если мы примем эту точку зрения, мы натолкнемся на препятствие в виде изначальной многозначности языка. Так как значение слова нельзя фиксировать настолько точно, чтобы исключить всякую возможность непонимания, мы никогда не сможем быть математически уверены, что формальная система правильно выражает наши математические мысли.

Примем, однако, другую точку зрения. Мы можем рассматривать формальную систему саму по себе как в высшей степени простую математическую структуру; объекты ее (знаки системы) связаны с другими, часто очень сложными математическими структурами. Таким образом, формализацию можно проводить внутри самой математики, и она становится мощным математическим орудием. Разумеется, нельзя быть уверенным, что формальная система полностью представляет какую-нибудь область математической мысли; в любой момент открытие новых методов рассуждения может заставить нас расширить формальную систему.

Форм. Мы уже несколько лет знакомы с этой ситуацией. Теорема Геделя о неполноте показала нам, что любая непротиворечивая система, формализующая теорию натуральных чисел, может быть непротиворечиво дополнена различными способами.

Инт. Отличие в том, что интуиционизм развивается независимо от формализации, которая может только идти по следам математической конструкции.

Класс. Больше всего меня изумляет то, что вы оба как бы начинаете на пустом месте. Мне кажется, что вы строите воздушные замки. Откуда вы знаете, что ваше рассуждение правильно, если у вас нет под рукой непогрешимого критерия логики? Вчера я разговаривал с **Сигном**, который является релятивистом еще в большей степени, чем любой из вас. Он так умело выкручивается, что никакой аргумент не имеет для него силы, и он не приходит ни к какому твердому заключению. Я боюсь, что такова судьба всякого, кто отказывается от опоры на логику, т. е. на здравый смысл.

Сигн. Когда упоминаешь черта, он уже тут как тут. Вы не говорили обо мне ничего плохого?

Класс. Я упомянул нашу вчерашнюю дискуссию. Сегодня я сражаюсь с двумя другими проклятыми релятивистами.

Сигн. Я с удовольствием помог бы вам, но сначала послушаем, что говорят ваши оппоненты. Позвольте познакомить вас с моим другом **Прагмом.** Ему будет очень интересно участвовать в этой дискуссии.

Форм. Как поживаете? Вы тоже являетесь философом науки?

Прагм. Я ненавижу метафизику.

Инт. В таком случае добро пожаловать, собрат!

Форм. Пожалуй, я бы не хотел защищать мою позицию сейчас, когда наша дискуссия главным образом касается интуиционизма и ее так легко можно запутать. Но боюсь, что вы ошибаетесь в отношении интуиционистской логики. На самом деле она формализована, и многим авторам принадлежат ценные работы в этой области. По-видимому, интуиционисты ценят логику выше, чем вы думаете, хотя она и отлична от той, к которой вы привыкли.

Инт. Мне жаль, что я вас разочарую. Логика — не почва, на которой я стою. Да и как это могло бы быть? Она в свою очередь нуждалась бы в обосновании, которое содержало бы гораздо более запутанные и менее прямые принципы, чем принципы самой математики. Математическое построение должно быть таким непосредственным для разума и его результат должен быть столь ясным, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. Можно очень хорошо понимать, является ли рассуждение правильным, не пользуясь логикой; достаточно ясного научного сознания. И все же справедливо, что интуиционистская логика

была развита. Чтобы показать, в чем ее значение, позвольте мне продемонстрировать вам один пример. Пусть A означает свойство натурального числа быть кратным 8, B — быть кратным 4, C — быть кратным 2. $8a$ мы можем записать как $4\times 2a$; благодаря этому математическому построению P мы видим, что свойство A влечет свойство B или $A \rightarrow B$. Подобное построение Q показывает, что $B \rightarrow C$. Употребляя сначала P, потом Q (суперпозиция P и Q), мы получаем $8a = 2\times(2\times 2a)$, что доказывает $A \rightarrow C$. Этот процесс остается пригодным, если вместо A, B, C мы подставим произвольные свойства. А именно если построение P показывает, что $A \rightarrow B$, и построение Q показывает, что $B \rightarrow C$, то суперпозиция P и Q показывает, что $A \rightarrow C$. Мы получили логическую теорему. Процесс, при помощи которого она выведена, показывает нам, что она по существу не отличается от математических теорем; она только более обща, в том же смысле, как, например, утверждение «сложение целых чисел коммутативно» носит более общий характер, чем утверждение «$2+3=3+2$». Это самое имеет место и для всякой логической теоремы: она является не чем иным, как математической теоремой наивысшей общности; иначе говоря, логика является частью математики и не может служить для ее обоснования. По крайней мере такова концепция логики, к которой я пришел естественным образом; возможно и желательно развивать иные формы логики для иных целей.

Как раз та математическая логика, которую я только что описал, и была формализована. Оказалось, что у получившейся формальной системы имеются своеобразные свойства, очень интересные в сравнении со свойствами других систем формальной логики. Этот факт привел к исследованиям, о которых упомянул господин **Форм**; но, как бы они ни были интересны, их связь с интуиционистской математикой является очень слабой.

Букв. Я думаю, что все это — воображаемые и искусственные трудности. Математика — совершенно простая вещь. Я определяю какие-то знаки и даю правила их комбинирования, вот и все.

Форм. Но вам понадобятся какие-нибудь способы рассуждения, чтобы доказать непротиворечивость вашей формальной системы.

Букв. А зачем мне это нужно доказывать? Не забывайте, что наши формальные системы построены для приложений

и что в общем они оказываются полезными; этот факт было бы трудно объяснить, если бы каждая формула была в них выводима. Поэтому у нас есть практическая уверенность в их непротиворечивости, что достаточно для нашей работы. Я оспариваю интуиционистское положение, что математика каким-то образом связана с бесконечным. Я могу написать знак, скажем α, и назвать его мощностью натурального ряда. Затем я могу установить правила для манипуляции с ним в соответствии с правилами, которые господин **Класс** использует для этого понятия; но, делая это, я целиком действую в области конечного. Когда же выступает понятие бесконечности, то рассуждение становится темным и путаным. Поэтому все интуиционистские утверждения о бесконечном кажутся мне в высшей степени неопределенными, и сомнительно даже, имеет ли такой символ, как $10^{10^{10}}$, какой-нибудь смысл, а не является просто фигурой на бумаге, с которой мы поступаем по известным правилам [Дьедонне, 1949].

Инт. Конечно, ваш крайний финитизм дает максимальные гарантии против опасности непонимания, но, по нашему мнению, он влечет за собою такое отрицание понимания, которое трудно принять. Дети в начальной школе уже понимают, что такое натуральные числа и принимают факт, что последовательность натуральных чисел может быть бесконечно продолжена.

Букв. Им просто внушили, что они это понимают.

Инт. Это не возражение, так как вообще любое сообщение посредством языка можно интерпретировать как внушение. И Евклид в 20-й теореме IX книги, когда он доказывал, что множество простых чисел бесконечно, знал, о чем говорил. Это элементарное понятие натурального числа, знакомое каждому мыслящему существу, является фундаментальным в интуиционистской математике. Мы не заявляем, что оно обладает определенностью и точностью в абсолютном смысле: это было бы неосуществимо. Но мы утверждаем, что оно достаточно ясно для того, чтобы можно было на нем построить математику.

Букв. Могу возразить, что вы предполагаете не слишком мало, как думает господин **Класс**, а слишком много. Вы исходите из известных принципов, которые вы без объяснений считаете интуитивно ясными, и одновременно отвергаете другие способы рассуждения, не указывая оснований для этой дискриминации. Например, большин-

ству людей принцип исключенного третьего кажется по меньшей мере столь же очевидным, как принцип полной индукции. Почему вы отвергаете первый и принимаете последний? Такой необоснованный выбор первого принципа придает вашей системе весьма догматический характер.

Инт. Конечно, интуиционистские утверждения должны показаться догматическими тем, кто понимает их как утверждения о фактах, но у них другой смысл. Интуиционистская математика состоит, как я уже объяснял господину Классу, в умственных построениях: математическая теорема выражает чисто эмпирический факт, а именно успешность некоторого построения. «$2+2=3+1$» нужно понимать, как сокращение для утверждения: «Я выполнил построения, обозначенные посредством «$2+2$» и «$3+1$», и нашел, что они ведут к одному и тому же результату». Теперь скажите мне, где здесь может встретиться догматический элемент? Не в самом умственном построении, что явствует из его природы как деятельности; и тем более не в утверждениях по поводу построений, так как они выражают чисто эмпирические результаты.

Букв. Но ведь вы утверждаете, что эти умственные построения ведут к какому-то роду истины; что они не игра в солитер, а что в некотором смысле они должны быть ценными для человечества — иначе вы поступали бы нехорошо, досаждая ими другим людям. Именно в этой претензии я и вижу догматический элемент. Математическая интуиция вдохновляет вас на объективные и вечные истины; в этом смысле ваша точка зрения не только догматична, но даже теологична [Карри, 1951, стр. 6].

Инт. В первую очередь мои математические мысли принадлежат моей индивидуальной интеллектуальной жизни и ограничены моим личным разумом, как и вообще все мои мысли. Мы, вообще говоря, убеждены, что у других людей мысли аналогичны нашим собственным и что они могут нас понимать, когда мы выражаем наши мысли словами. Вместе с тем мы знаем, что никогда нельзя быть вполне уверенным, что нас поняли без ошибок. В этом отношении математика по сути дела не отличается от других предметов; если вы считаете математику догматичной по этой причине, то вы должны называть догматичным любое человеческое рассуждение. Для математической мысли характерно, что она не выражает истину о внешнем мире, а связана исключительно с умственными построениями. Мы

должны провести границу между простой практикой математики и ее оценкой. Чтобы строить математические теории, не нужно никаких философских предпосылок, но ценность, которую мы приписываем этой деятельности, зависит от наших философских идей.

Сигн. У вас устарелые взгляды на язык. Тем непостоянным текучим характером, который вы описали, обладают первобытные языки, причем язык повседневной жизни в основном еще принадлежит к тому же типу, однако с началом научного мышления начинается формализация языка. В последние десятилетия семиотики изучали этот процесс. Он еще не кончился, так как постоянно создаются все более точные языки.

Инт. Если действительно путь науки — формализация языка, то интуиционистская математика не принадлежит к науке в этом смысле слова. Скорее, она — естественная деятельность человека, которая сама по себе, конечно, может изучаться научными методами. Она действительно изучалась такими методами, а именно методом формализации интуиционистского рассуждения и методом семиотики, но очевидно, что ни это изучение, ни его результаты не принадлежат к интуиционистской математике. Ясно, что научное исследование интуиционистской математики никогда не даст полного и определенного ее описания, так же как недостижима полная теория других явлений. Как бы ни были интересны и полезны эти метаинтуиционистские рассмотрения, их нельзя включить в саму интуиционистскую математику. Само собой разумеется, что эти замечания не касаются описанной мною несколько ранее формализации внутри самой математики.

Прагм. Позвольте мне подчеркнуть то, что сейчас сказал господин **Сигн.** Наука продвигается вперед при помощи формализации языка; она использует этот метод, потому что он эффективен. В частности, оказалось, что современные, полностью формализованные языки являются наиболее полезными. Идеалом современного ученого является создание готового для употребления запаса формальных систем, из которого он для любой теории сможет выбрать систему, правильно представляющую результаты опыта. Оценка формальных систем должна производиться по критерию полезности, а не по неопределенному и произвольному истолкованию, предпочитаемому в силу догматических и метафизических оснований.

Инт. Мне тоже кажется, что совершенно справедливо давать оценку математической системы по ее полезности. Я допускаю, что с этой точки зрения у интуиционизма до сих пор было мало шансов на успех, так как было бы преждевременно подчеркивать немногие и слабые признаки того, что он может принести какую-либо пользу в физике [Детуш, 1951]; по-моему, у него больше шансов принести пользу в философии, истории и социальных науках. Действительно, с интуиционистской точки зрения математика является изучением определенных функций человеческого разума и, как таковая, сродни этим наукам. Однако является ли польза единственным мерилом ценности? Легко привести такие сферы деятельности, которые никоим образом не служат науке и тем не менее не лишены ценности. Таковы искусство, спорт, развлечения. Мы заявляем, что у интуиционизма есть ценность такого же рода, которую трудно описать заранее, но которая ясно ощущается, когда непосредственно имеешь дело с ним. Вы знаете, как трудна для философов проблема определения понятия ценности в искусстве, однако любой образованный человек ощущает эту ценность. Аналогично обстоит дело и с ценностью интуиционистской математики.

Форм. Для большинства математиков эту ценность роковым образом подрывает тот факт, что вы разрушаете наиболее драгоценные математические результаты; настоящее обоснование математики должно было бы спасти как можно больше из ее результатов [Гильберт, 1922]. Это может быть достигнуто даже конструктивными методами, так как мыслимы определения конструктивности, отличные от определения, защищаемого интуиционистами. Ведь даже немногие существующие сейчас интуиционисты не согласны полностью друг с другом относительно определения конструктивного. Наиболее ярким примером является отклонение Гриссом понятия отрицания, которое другие интуиционисты считают совершенно ясным [Фрейденталь, 1936А, Грисс, 1946, стр. 24; 1946 А]. С другой стороны, кажется вероятным, что несколько более либеральная концепция конструктивного могла бы спасти жизненно важные части классической математики.

Инт. Поскольку интуиционисты говорят на неформализованном языке, можно ожидать, что у них будут небольшие расхождения во мнениях. Хотя они проявились скорее и в более острых формах, чем мы могли предвидеть, они

нисколько не вызывают тревогу, ибо все они касаются второстепенных вопросов и не затрагивают основных идей, относительно которых имеется полное согласие. Поэтому в высшей степени неправдоподобно, чтобы более широкая концепция конструктивности могла получить поддержку интуиционистов. Что же касается вивисекции над математикой, в которой вы меня обвиняете, то ее нужно принимать как неизбежное следствие наших исходных установок. Ее можно рассматривать так же как удаление нездоровых образований, прекрасных по форме, но пустых по сути. Оно во всяком случае частично компенсируется очарованием тонких различений и остроумных методов, которыми интуиционисты обогатили математическую мысль [4].

Форм. Наша дискуссия приняла форму дискуссии о ценностях. Из ваших слов я делаю вывод, что вы готовы признать ценность других концепций математики, но что вы настаиваете на ценности вашей концепции. Не так ли?

Инт. Действительно, единственным позитивным утверждением в основаниях математики, против которого я выступаю, является утверждение, что классическая математика имеет ясный смысл. Должен сознаться, что я этого не понимаю. Но даже те, кто утверждают, что они понимают это, могли бы постараться понять и нашу точку зрения и оценить нашу работу.

Букв. То, что классическая математика не может претендовать на полную ясность, доказано наличием парадоксов.

Форм. Конечно, это так, но интуиционистская критика заходит гораздо дальше, чем необходимо для того, чтобы избежать парадоксов; господин **Инт** даже не привел их в качестве аргумента в пользу своей концепции. Без сомнения, для него непротиворечивость является лишь желательным побочным продуктом интуиционизма.

Сигн. Господин **Инт**, вы описываете вашу деятельность как умственные построения, но умственные процессы можно наблюдать только посредством действий, к которым они приводят, в вашем случае посредством слов, которые вы говорите, и формул, которые вы пишите. Не означает ли это, что единственным способом изучать интуиционизм является изучение строящейся им формальной системы?

Инт. Когда я смотрю вон на то дерево, я убежден, что вижу дерево, и нужна немалая тренировка, чтобы заменить это убеждение знанием того, что в действительности в мой

глаз проникают лучи света, что приводит меня к построению образа дерева. Точно так же, обращаясь к вам, я убежден, что излагаю вам свои мнения, но вы, как я вижу, поучаете меня, что в действительности я произвожу колебания воздуха, которые заставляют вас выполнять известные действия, например производить другие колебания. В обоих случаях первая точка зрения является естественной, вторая же представляет собой теоретическое построение. Слишком часто забывают, что истинность таких построений зависит от современного состояния науки и что слова «в действительности» нужно перевести как «в соответствии с современными взглядами ученых». Поэтому я предпочитаю держаться того мнения, что, описывая интуиционистскую математику, я сообщаю некоторые мысли моим слушателям; эти слова нужно понимать не в смысле какой-то философской системы, а в смысле повседневной жизни.

Сигн. В таком случае интуиционизм как форма взаимодействия между людьми представляет собою социальное явление, и его изучение принадлежит истории цивилизации.

Инт. Его изучение, но не его практика. Здесь я согласен с господином **Прагмом**: primum vivere, deinde philosophari, и, если хотите, мы можем предоставить последнее другим. Пусть они интересуются тем, как я создавал эти умственные построения и как их можно интерпретировать в какой-нибудь философии. Я довольствуюсь, создавая их, убеждением, что они внесут свой вклад в прояснение человеческой мысли.

Прагм. Это общая ошибка философов — говорить о вещах, которые они знают несовершенно, и мы уже готовы попасть в эту западню! Не может ли господин **Инт** показать нам какие-нибудь образцы интуиционистского рассуждения, чтобы мы могли лучше оценить этот предмет.

Инт. Конечно, я готов и даже убежден, что несколько уроков дадут вам лучшее понимание интуиционизма, чем продолжительные дискуссии. Прошу тех из вас, кто заинтересован в моих объяснениях, пройти вместе со мной в мою классную комнату.

II. АРИФМЕТИКА

2.1. Натуральные числа

Инт. Мы начнем с понятия натуральных чисел 1, 2, 3 и т. д. Оно настолько нам знакомо, что трудно свести его к чему-нибудь более простому. Все же я попытаюсь в простых словах описать его смысл. В восприятии любого предмета мы представляем его себе как сущность, отвлекаясь от его частных свойств. Мы познаем также возможность неограниченного повторения этой сущности. Здесь-то и лежит источник понятия натурального числа [Брауэр, 1907, стр. 3; 1948, стр. 1237].

Класс. Разве эти соображения не являются по своей природе метафизическими?

Инт. Они становятся таковыми, если пытаться построить их теорию, например, решать вопрос, формируем ли мы понятие сущности, абстрагируясь от действительных восприятий предметов, или же, наоборот, понятие сущности должно наличествовать в нашем уме, чтобы дать нам возможность воспринимать предмет отдельно от всего остального мира. Но такие вопросы не имеют ничего общего с математикой. Мы просто констатируем факт, что понятие абстрактной сущности и понятие последовательности таких сущностей ясны для каждого нормального человеческого существа, даже для маленьких детей.

Класс. Допустим, мы признали, что вы имеете в своем распоряжении натуральные числа. Теперь у вас должны быть какие-то исходные позиции для ваших выводов. Принимаете ли вы аксиомы Пеано?

Инт. Вы мыслите на языке аксиом и выводов, мы же мыслим в терминах очевидности — в этом вся разница между нами. Я не принимаю никаких аксиом, которые я

мог бы отбросить, если бы захотел. Понятие натуральных чисел не появляется у нас как чистое понятие. С самого начала оно выступает в облачении свойств, которые я могу выявить простым рассмотрением. Я сейчас покажу вам, что к этим свойствам относятся и те, которые вы описываете при помощи аксиом Пеано. Пусть «N» будет сокращением для выражения «натуральное число». Две первые аксиомы («1 есть N» и «если x есть N, то и следующее за x есть N») могут быть непосредственно усмотрены при выполнении производящего построения. То же самое применимо к третьей и четвертой аксиомам («если x и y суть N и следующее за x равно следующему за y, то $x = y$»; «следующее за любым N не равно 1»). Что же касается так называемой аксиомы полной индукции, то ее нужно рассматривать как основную теорему о натуральных числах. Сделаем некоторые предварительные замечания, которые окажутся полезными при доказательстве этой теоремы.

Построение натурального числа n состоит в последовательном построении некоторых натуральных чисел, называемых числами, от 1 до n, символически: $1 \to n$. На любом шаге построения мы можем остановиться, чтобы исследовать, обладает ли полученное на этом шаге число некоторым определенным свойством. Например, мы можем определить, встречается ли данное число m, отличное от n, в ряду $1 \to n$. Если встречается, то мы говорим, что $m < n$; если не встречается, то мы говорим, что $m > n$. Далее, имеет место теорема: «если $m \neq n$ и $m > n$, то $n < m$». Ибо если m не встречается в $1 \to n$, это значит, что в тот момент, когда мы завершаем построение n, построение m еще не закончено; поэтому n встречается в $1 \to m$.

Теорема полной индукции допускает доказательство того же рода. Пусть $E(x)$ такой предикат над натуральными числами, что $E(1)$ истинно и что для любого n $E(n)$ влечет $E(n')$, где n' — число, следующее за n. Пусть p — любое натуральное число. Пробегая ряд $1 \to p$, мы знаем, что свойство E, истинное для 1, сохраняется на любом шаге построения p; следовательно, имеет место $E(p)$.

Аналогичные замечания применимы к обычным рекурсивным определениям суммы и произведения в области натуральных чисел. Пробегая $1 \to p$, мы видим, что действительно $a + p$ и $p \cdot a$ определены для любых натуральных чисел a и p. Коль скоро мы обладаем основными методами индукции и рекурсии, построение арифметики натураль-

ных чисел не встречает серьезных трудностей, равно как и построение арифметики целых чисел и даже арифметики рациональных чисел. Трудности возникают только тогда, когда приходится рассматривать всю совокупность целых чисел, как в предпринятой нами во время дискуссии попытке II определить некоторое целое число. Но такие проблемы не относятся к элементарной арифметике.

Форм. Вы неоднократно говорили о равных натуральных числах. Что это означает? Разве не обязательно определение равенства, основанное, например, на понятии взаимнооднозначного соответствия?

Инт. Действительно, этот пункт нуждается в некотором разъяснении. Для этого мне придется даже немного пересмотреть наше понятие натурального числа. Если бы натуральное число было только результатом умственного построения, то оно не продолжало бы существовать после завершения акта этого построения и было бы невозможно сравнивать его с другими натуральными числами, построенными в другое время и в другом месте. Ясно, что мы не сможем решить эту проблему, если будем придерживаться той точки зрения, что математика является чисто умственной [5]. В действительности мы фиксируем натуральное число x средствами материального представления; с каждым элементом построения x мы связываем, например, точку на бумаге. Это помогает нам сравнивать при помощи простого наблюдения натуральные числа, построенные в различное время [6].

Форм. Но ведь это сводится к применению взаимнооднозначного соответствия!

Инт. Можно сказать и так, если мы осознаем, что процесс сравнения находится на доматематическом уровне. Математика начинается после того, как выработаны понятия натуральных чисел и равенства между ними. Конечно, разделение математики и доматематики искусственно, так же как и любое расчленение человеческой мысли, но оно соответствует важному различию в их методах.

Букв. Можно было бы ожидать, что основные понятия математики будут простыми и ясными, но ваше понятие натурального числа оказывается довольно сложным.

Инт. Насколько я знаю, психология не открыла атомы разума. Любое понятие можно анализировать, ничто непостижимо само по себе; объяснение любого понятия зависит от его отношений к другим понятиям. Понятие нату-

рального числа не является исключением из этого правила. Все же оно пригодно для того, чтобы служить одним из основных понятий математики, главным образом в силу следующих причин.

1. Оно легко понимается любым человеком, имеющим минимальное образование.

2. Оно универсально применимо в процессе счета.

3. Оно лежит в основании построения анализа.

Класс. Если не касаться этих философских вопросов, то ваше понимание арифметики рациональных чисел совпадает с нашим.

2.2. *Действительные числовые генераторы*

2.2.1. *Определение; отношение совпадения*

Инт. Да, но на следующей станции, на станции действительных чисел, мы вступаем совсем в другой ландшафт. Как и в классической математике, так и в интуиционизме, возможны различные эквивалентные теории действительных чисел [Брауэр, 1919 A, стр. 3; Гейтинг, 1935]. Я изложу здесь вкратце теорию канторовского типа, что полезнее для наших целей.

Предположим, что уже развита теория рациональных чисел, включающая теорию их упорядочения. Последовательность $\{a_n\}$ рациональных чисел называется *последовательностью Коши*, если для каждого натурального числа k мы можем найти натуральное число $n = n(k)$, такое, что $|a_{n+p} - a_n| < 1/k$ для любого натурального числа p. Это нужно понимать так, что по данному k мы в состоянии эффективно определить $n(k)$.

Пример. Последовательность $a \equiv \{2^{-n}\}$ есть последовательность Коши. Пусть последовательность $b \equiv \{b_n\}$ определена следующим образом: если n-й знак после запятой в десятичном разложении числа π есть 9 первого вхождения последовательности 0123456789 в это разложение, то $b_n = 1$; во всяком другом случае $b_n = 2^{-n}$. Последовательность b отличается от a не более чем одним членом; таким образом, классически b является последовательностью Коши, но пока мы не знаем, существует ли вхождение последовательности 0123456789 в десятичное разложе-

ние π, мы не можем найти такое n, что для любого p имеет место $|b_{n+p}-b_n|<\frac{1}{2}$; следовательно, мы не имеем права утверждать, что b является последовательностью Коши в нашем смысле.

Определение 1. Последовательность Коши из рациональных чисел называется *действительным числовым генератором* (сокращенно ЧГ)[7].

Два ЧГ $a\equiv\{a_n\}$ и $b\equiv\{b_n\}$ *тождественны*, если $a_n=b_n$ при любом n. Мы выражаем это так: $a\equiv b$. Определяемое ниже понятие совпадения является более важным.

Определение 2. Два ЧГ $a\equiv\{a_n\}$ и $b\equiv\{b_n\}$ *совпадают*, если для любого k мы можем найти такое $n=n(k)$, что $|a_{n+p}-b_{n+p}|<1/k$ для любого p. Это отношение обозначается посредством $a=b$.

Теорема. Отношение совпадения между ЧГ является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Простое доказательство общеизвестно.

Замечание. Для данного $a\equiv\{a_n\}$ можно найти такой $b\equiv\{b_n\}$, что $a=b$ и что последовательность $\{b_n\}$ сходится быстро. Например, чтобы получить неравенство $|b_{n+p}-b_n|<\frac{1}{n}$ для любых n и p, достаточно взять $b_k=a_{n(k)}$ при любом k[8].

Если нам в последующем изложении встретится ЧГ, обозначенный одной буквой, например v, то он также будет обозначаться посредством $\{v_n\}$ и под v_n будет подразумеваться n-я компонента последовательности v.

Поскольку понятие действительного числа предполагает основные понятия теории множеств, то я откладываю до главы III определение действительного числа, как множества совпадающих ЧГ.

2.2.2. *Отношение неравенства между ЧГ*

Противоречивость $a=b$ (а это означает, что предположение $a=b$ ведет к противоречию), мы будем записывать в виде $a\neq b$.

Теорема 1. Если $a\neq b$ противоречиво, то $a=b$ [Брауэр, 1925, стр. 254].

Доказательство. Возьмем такое n, чтобы для

каждого p имело место $|a_{n+p}-a_n|<\frac{1}{4k}$ и $|b_{n+p}-b_n|<\frac{1}{4k}$. Далее, предположив, что $|a_n-b_n|\geqslant\frac{1}{k}$, мы бы имели $|a_{n+p}-b_{n+p}|>\frac{1}{4k}$ для любого p, откуда следовало бы, что $a\neq b$. Поэтому $|a_n-b_n|<\frac{1}{k}$ и при любом p $|a_{n+p}-b_{n+p}|<\frac{2}{k}$. Так как для каждого k можно найти такое n, что последнее неравенство справедливо при любом p, то $a=b$.

Класс. Нам нужно выработать у себя привычку к тому, что такая теорема вообще нуждается в доказательстве.

Инт. Доказательство невозможности невозможности какого-нибудь свойства не всегда есть доказательство этого свойства. Поучительно проиллюстрировать это на следующем примере [Брауэр, 1925, стр. 252]. Я записываю десятичное разложение π, а под ним десятичную дробь $\rho=0{,}333\ldots$, которую я обрываю в тот момент, когда последовательность знаков 0123456789 впервые появляется в разложении π. Если цифра 9 из первого вхождения 0123456789 в π является k-м знаком после запятой, то $\rho=\frac{10^k-1}{3\cdot 10^k}$. Теперь предположим, что ρ не может быть рациональным; тогда равенство $\rho=\frac{10^k-1}{3\cdot 10^k}$ было бы невозможно и последовательность 0123456789 никогда не появлялась бы в π; но тогда $\rho={}^1/_3$, что тоже невозможно. Предположение, что ρ не рационально, привело нас к противоречию. Однако мы не вправе утверждать, что ρ рационально, ибо это означало бы, что мы можем вычислить числитель и знаменатель некоторой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, равной ρ; а для этого, очевидно, требуется, чтобы мы могли либо указать вхождение 0123456789 в π, либо доказать, что такого вхождения не существует.

Класс. И вы, конечно, отвергаете мой довод, что ρ равно одному из рациональных чисел 1/3; 0,3; 0,33 и т. д., хотя мы не знаем, какому из них.

Инт. Совершенно правильно; по-моему, действительное положение вещей лучше выразить, говоря, что ρ не может быть отличным от всех этих чисел.

Класс. Мне кажется, что трудности возникают благодаря вашей интерпретации отрицания, которая отличается от обычной. Для вас высказывание «ρ не рационально» означает то же самое, что «предположение рациональности ρ ведет к противоречию». Поэтому вы говорите исключительно о ложности «de jure», тогда как обычное отрицание относится к ложности «de facto». Это может служить объяснением странного поведения вашего отрицания.

Инт. Я могу присоединиться к этой точке зрения, если мы согласимся, что в интуиционистской математике только ложность «de jure» может играть роль; введение ложности «de facto» противоречило бы принципу конструктивности.

Строго говоря, мы должны хорошо различать использование «не» в математике и его использование в повседневном языке нематематических рассуждений. В математических утверждениях не может возникнуть неопределенность; «не» всегда имеет точный смысл. «Суждение p не является истинным» или «суждение p является ложным» означает «предполагая истинность p, мы придем к противоречию». Но если мы говорим, что ранее определенный ЧГ ρ не рационален, то это не мыслится как математическое утверждение, а является просто констатированием факта; под этим я подразумеваю, что до сих пор еще не было дано доказательство рациональности ρ. Так как не всегда легко увидеть, является ли суждение математическим утверждением или констатированием настоящего состояния нашего знания, то необходимо быть внимательным при формулировании такого рода суждений. Там, где есть опасность впасть в двусмысленность, мы передаем математическое отрицание при помощи таких выражений, как «невозможно, чтобы», «ложно, что», «не может быть, что» и т. д., в то время как фактическое отрицание передается посредством таких выражений, как «мы не вправе утверждать, что», «никто не знает, что» и т. д.

Имеется критерий, при помощи которого мы можем распознавать математические утверждения как таковые. Каждое математическое утверждение можно выразить в форме: «Я выполнил в уме построение A». Математическое отрицание этого утверждения можно выразить как «Я выполнил в уме построение B, которое приводит к противоречию предположение, что можно довести до конца построение A». И утверждение, и отрицание выражены здесь в одинаковой форме. С другой стороны, фактически отрицанием пер-

вого утверждения является: «Я не выполнил в уме построение A»; это констатирование не имеет формы математического утверждения.

Прагм. Мне кажется, что вы очень заинтересованы в таких примерах, как пример числа ρ. Я нахожу их почти в каждой вашей работе. Постороннему человеку построение таких искусственных патологических примеров кажется каким-то несерьезным занятием.

Инт. Нам приходится строить такие примеры, чтобы убеждать других в необходимости доказательства некоторых предложений. Но было бы неправильно считать их существенной частью интуиционистской математики, точно так же, как было бы неправильно полагать, что непрерывная, нигде не дифференцируемая функция Вейерштрасса является существенной частью классического дифференциального исчисления [9].

2.2.3. *Отношение отделенности между ЧГ*

Однако мы уже слишком долго занимались негативным понятием неравенства; негативные понятия для нас даже менее важны, чем в классической математике; когда только возможно, мы заменяем их позитивными понятиями. В случае неравенства ЧГ мы делаем это с помощью следующего определения.

Определение 1. ЧГ a и b *отделены*, $a \# b$, если можно найти такие n и k, что $|a_{n+p} - b_{n+p}| > \frac{1}{k}$ для любого p [Брауэр, 1919 А, стр. 3]. Условие $a \# b$ влечет $a \neq b$, но мы не имеем права утверждать обратное. Это можно показать при помощи примера, еще более утонченного, чем предыдущий. Поскольку с ним связаны некоторые тонкие вопросы, я отложу его до одной из следующих лекций (8.1.1). Надеюсь, и сейчас достаточно ясно, что условие $a \# b$ требует большего, чем условие $a \neq b$, поскольку первое из них требует действительного указания чисел n и k, тогда как для последнего достаточно лишь доказательство невозможности [10].

Я выведу сейчас основные свойства отношения $\#$.

Теорема 1. Если $a \# b$, то $b \# a$.

Теорема 2. Если $a \# b$ и $a = a'$, то $a' \# b$.

Доказательство. Мы можем найти n и k, такие, что

$$|a_{n+p} - b_{n+p}| > 1/k \text{ для любого } p.$$

Далее возьмем m, такое, что

$$|a_{m+p} - a'_{m+p}| < \frac{1}{2k} \text{ для любого } p.$$

Тогда, если h является наибольшим из m и n, то

$$|a'_{h+p} - b_{h+p}| > \frac{1}{2k} \text{ для любого } p.$$

Теорема 3. Если $a \# b$ невозможно, то $a = b$ [Брауэр, 1925, стр. 254].

Доказательство теор. 1 из 2.2.2 было построено таким образом, что в нем содержится доказательство и данной, более сильной, теоремы.

Теорема 4. Если $a \# b$, то для любого ЧГ c имеет место $a \# c$ или $b \# c$.

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 2, мы находим k и h, такие, что

(i) $|a_{h+p} - b_{h+p}| > \frac{1}{k}$ при любом p;

(ii) $|a_{h+1} - a_{h+p}| < \frac{1}{8k}$ при любом p;

(iii) $|b_{h+1} - b_{h+p}| < \frac{1}{8k}$ при любом p;

(iv) $|c_{h+1} - c_{h+p}| < \frac{1}{8k}$ при любом p.

Тогда в силу (i) при $p = 1$ имеем $|a_{h+1} - c_{h+1}| > \frac{1}{2k}$, или $|b_{h+1} - c_{h+1}| > \frac{1}{2k}$.

В первом случае мы получаем из (ii) и (iv), что

$$|a_{h+p} - c_{h+p}| > \frac{1}{4k} \text{ при любом } p,$$

отсюда $a \# c$; во втором случае

$$|b_{h+p} - c_{h+p}| > \frac{1}{4k} \text{ при любом } p,$$

т. е. $b \# c$.

2.2.4. *Основные операции над ЧГ*

Определение 1. Если a и b суть ЧГ и являются последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно, то

(i) $a+b$ есть последовательность $\{a_n+b_n\}$;

(ii) ab есть последовательность $\{a_nb_n\}$;

(iii) $-a$ есть последовательность $\{-a_n\}$;

(iv) Если $a \# 0$, то a^{-1} есть последовательность $\{c_n\}$, где $c_n = a_n^{-1}$, если $a_n \neq 0$ и $c_n = 0$, если $a_n = 0$.

Теорема 1. Последовательности $a+b$, ab, $-a$ и a^{-1} суть ЧГ.

Доказательство. Легко доказывается известными методами, что все определенные последовательности являются последовательностями Коши.

Замечания. (1) Заметим, что a^{-1} можно определить только в том случае, когда $a \# 0$; это условие необходимо и достаточно для того, чтобы доказать ограниченность последовательности, определяющей a^{-1}[1]).

(2) Рациональное число r может быть отождествлено с последовательностью, каждый член которой есть r. При помощи этого приема система последовательностей, порождающих действительные числа, оказывается расширением системы рациональных чисел. Это замечание было применено в опр. 1 (iv).

(3) Для рациональных чисел не нужно проводить различие между $\neq$ и $\#$, так как если $a \neq b$, то $a-b$ является рациональным числом, отличным от 0 и $|a-b| = p/q > \frac{1}{2q}$.

Теорема 2. Если $a = a'$ и $b = b'$, то $a+b = a'+b'$ и $ab = a'b'$.

Если $a = a'$, то $-a = -a'$.

Если $a \# 0$ и $a = a'$, то $a^{-1} = (a')^{-1}$.

Доказательство. Докажем только последнее утверждение. Так как $a \# 0$, мы можем найти n и j, такие, что $|a_{n+p}| > 1/j$ для любого p; в силу теор. 2 из 2.2.3 мы точно так же найдем n' и j', такие, что $|a'_{n'+p}| > 1/j'$ для любого p.

При любом данном натуральном числе k мы можем определить l так, чтобы имело место

$$|a_{l+p} - a'_{l+p}| < \frac{1}{jj'k} \text{ для любого } p.$$

Пусть $a^{-1} = c$ и $(a')^{-1} = c'$, тогда, если m наибольшее из чисел n, n', l, то

$$|c_{m+p} - c'_{m+p}| = \frac{|a_{m+p} - a'_{m+p}|}{|a_{m+p}a'_{m+p}|} < \frac{1}{k}$$

для любого p.

Отсюда $c = c'$.

2.2.5. *Основные тождества*

Для краткости записи основных тождеств я введу понятие рациональной функции.

Определение 1. *Рациональная функция* $f(a, b, c, \ldots)$ определяется конечным числом применений четырех основных операций. Она определяется для таких ЧГ $a, b, c, \ldots$, что всякий раз, когда в ходе вычисления f приходится брать обратный ЧГ, сам этот ЧГ отделен от нуля. Например,

$$f(a, b) = a^{-1}(a + b^{-1})^{-1}$$

определена для таких ЧГ a, b, что $a \# 0$, $b \# 0$ и $a + b^{-1} \# 0$.

Лемма. Если $f(a, b, c, \ldots)$ является рациональной функцией, а $a, b, c, \ldots$ — данные ЧГ, на которых f определена, и

$$f(a, b, c, \ldots) \equiv x,$$

то можно найти такое натуральное число n, что

$$x_{n+p} = f(a_{n+p}, b_{n+p}, c_{n+p}, \ldots)$$

для любого p.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(a, b, c, \ldots)$, $\varphi_2(a, b, c, \ldots), \ldots$ — те функции, обратные величины которых мы должны вычислить в ходе вычисления f. Тогда $\varphi_1(a, b, c, \ldots) \# 0$, и можно найти такой индекс k_1, что $\varphi_1(a_n, b_n, c_n, \ldots) \neq 0$ для $n > k_1$; таким же образом

найдем $k_2 > k_1$, такое, что $\varphi_2(a_n, b_n, c_n, \ldots) \neq 0$ для $n > k_2$ и т. д. Если kr — последний из так найденных индексов, то в силу опр. 1 из 2.2.4 мы получаем, что при $n > k_r$ имеет место $x_n = f(a_n, b_n, c_n, \ldots)$.

Теорема 1. Если рациональное тождество имеет место для рациональных чисел, то оно имеет место также и для ЧГ, что надо понимать в следующем смысле. Пусть $f(p, q, r, \ldots, x, y, z, \ldots)$ и $g(p, q, r, \ldots, x, y, z, \ldots)$ рациональные функции, такие, что $f = g$, если вместо $p, q, r, \ldots$ подставить данные рациональные числа $p_0, q_0, r_0, \ldots$, а вместо $x, y, z, \ldots$ произвольные рациональные числа, для которых f и g определены. Тогда $f(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots) = g(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots)$ для любых ЧГ $a, b, c, \ldots$, при которых f и g определены.

Доказательство. Пусть

$$f(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots) \equiv v$$

и

$$g(p_0, q_0, r_0, \ldots, a, b, c, \ldots) \equiv w.$$

В силу леммы можно найти индекс k, такой, что

$$f(p_0, q_0, r_0, \ldots, a_n, b_n, c_n, \ldots) = v_n$$

и

$$g(p_0, q_0, r_0, \ldots, a_n, b_n, c_n, \ldots) = w_n$$

для $n > k$. По предположению $v_n = w_n$; следовательно, $v = w$.

Этим сразу доказываются все основные тождества арифметики. Мы пополним их следующими теоремами, важными для анализа.

Теорема 2. $a \# b$ влечет $a + c \# b + c$.

Доказательство. Если $|a_{n+p} - b_{n+p}| > \frac{1}{k}$ при любом p, то $|(a_{n+p} + c_{n+p}) - (b_{n+p} + c_{n+p})| > \frac{1}{k}$ при любом p.

Теорема 3. $a \# 0$ и $b \# 0$ влекут $ab \# 0$.

Доказательство. Если $|a_{n+p}| > \frac{1}{k}$ и $|b_{n+p}| > \frac{1}{k^2}$ при любом p, то

$$|a_{n+p}\, b_{n+p}| > \frac{1}{k^2} \text{ при любом } p.$$

Теорема 4. $ab \# 0$ влечет $a \# 0$ и $b \# 0$.

Доказательство. Мы можем найти k и n, такие, что

$$|a_{n+p}b_{n+p}| > \frac{1}{k}, \; |a_{n+p} - a_n| < 1, \; |b_{n+p} - b_n| < 1$$

при любом p; тогда

$$|a_{n+p}| > \frac{1}{k(|b_n| + 1)} \text{ и } |b_{n+p}| > \frac{1}{k(|a_n| + 1)}$$

при любом p.

Теорема 5. $a + b \# 0$ влечет, что $a \# 0$, или $b \# 0$.

Доказательство. Пусть $a + b \# 0$. По теор. 2 $-a + a + b \# -a$, т. е. $b \# -a$. По теор. 4 из 2.2.3 $b \# 0$ или $-a \# 0$. Во втором случае прибавляем a к обоим членам и применяем теорему 2.

Класс. Классически мы рассматриваем эти теоремы как негативные свойства и даем для них косвенные доказательства. Например, если $a + c = b + c$, то $a = b$; следовательно, из $a \neq b$ следует $a + c \neq b + c$. Но я вижу, что вам нужны прямые доказательства, потому что вы рассматриваете позитивное отношение $\#$ вместо негативного отношения $\neq$.

Инт. Теоремы об отношении $\#$ и их доказательства проще теорем, включающих $\neq$ и $=$; с последними нужно обращаться с большой осторожностью, что я проиллюстрирую на следующем примере.

Пусть ЧГ a и b определены следующим образом: если в первых n десятичных знаках разложения π не встречается вхождения 0123456789, то $a_n = b_n = 2^{-n}$; если же такое вхождение встречается, причем 9 первого такого вхождения является k-м знаком после запятой, тогда при нечетном k пусть $a_n = 2^{-k}$ и $b_n = 2^{-n}$, а при четном k пусть $a_n = 2^{-n}$ и $b_n = 2^{-k}$. Ни для a, ни для b мы не в состоянии решить, равны ли они нулю. Но $ab = 0$! В первом случае $a_nb_n = 2^{-2n}$; во втором $a_nb_n = 2^{-k-n}$; в любом слу-

чае $|a_n b_n| < 1/m$ при $n > m$. Следовательно, суждение «если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$» не может быть доказано, пока существуют нерешенные математические проблемы того же рода, что и проблема, использованная при построении примера.

Класс. Однако если $ab = 0$, то невозможно, чтобы как a, так и b были отличны от нуля.

Инт. Это справедливо, так как $a \neq 0$ и $b \neq 0$ влекут за собой $ab \neq 0$, ибо я могу доказать следующим образом этот негативный аналог теоремы 3.

Делаю это в три шага.

(i) Если $ab = 0$ и $a \neq 0$, то $b = 0$, так как $b \neq 0$ влекло бы $ab \neq 0$ (теорема 3), значит, $b \neq 0$ невозможно и $b = 0$ (в силу теор. 3 из 2.2.3).

(ii) Если $ab = 0$ и $b \neq 0$, то $a = 0$, так как по (i) $a \neq 0$ влекло бы $b = 0$.

(iii) Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $ab \neq 0$, так как $ab = 0$ и $b \neq 0$ по (ii) влекло бы $a = 0$.

Форм. Разве мы не могли бы сказать, что из $ab = 0$ следует, что либо $a = 0$, либо $b = 0$, но мы можем и не знать, какое именно из этих двух соотношений истинно?

Инт. Было бы опасно применять такой неаккуратный способ выражения в таких тонких вопросах. Мы утверждаем суждение только тогда, когда мы можем его доказать; так мы утверждаем, что $a = 0$ или $b = 0$ только тогда, когда мы может доказать одно из этих суждений. Если же мы утверждаем, что невозможно $a \neq 0$ и $b \neq 0$ одновременно, то мы указываем как раз то, что мы доказали, и это выражение едва ли более сложно, чем то, которое предлагаете вы. Если мы используем ваше выражение, то мы должны всегда помнить, что оно имеет смысл, отличный от того, который выражен самими словами.

2.2.6. *Отношения порядка между ЧГ*

Об отношениях порядка я скажу кратко.

Определение 1. Мы пишем $a < b$, если можно найти n и k, такие, что $b_{n+p} - a_{n+p} > \frac{1}{k}$ при любом p; $a > b$ означает то же, что $b < a$.

Теорема 1. Если $a \# b$, то $a < b$ или $b < a$.

Доказательство. Возьмем n и k, такие, что $|a_{n+p}-b_{n+p}|>\frac{1}{k}$ при любом p. Определим теперь $m>n$ так, что $|a_m-a_{m+p}|<\frac{1}{4k}$ и $|b_m-b_{m+p}|<\frac{1}{4k}$ при любом p, $a_m-b_m>\frac{1}{k}$, или $b_m-a_m>\frac{1}{k}$. В первом случае $a_{m+p}-b_{m+p}>\frac{1}{2k}$ при любом p, т. е. $b<a$; во втором случае получаем $a<b$.

Теорема 2. *Если* $a<b$, *то* $a \# b$.

Это следует непосредственно из определений.

Теоремы 1 и 2 показывают, что $a \# b$ равносильно ($a<b$ или $a>b$).

Теорема 3. *Если противоречиво, что* $a<b$ *и противоречиво, что* $b<a$, *то* $a=b$.

Доказательство. Мы приводим к противоречию предположение, что $a \# b$, применив теорему 1; тогда по теор. 3 из 2.2.3 следует, что $a=b$.

Теорема 4. *Если* $a<b$, *то для любого ЧГ* c *имеем* $a<c$, *или* $c<b$.

Доказательство аналогично доказательству теор. 4 из 2.2.3.

Теорема 5. *Если* $a<b$ *и* $b=c$, *то* $a<c$.

Доказательство аналогично доказательству теор. 2 из 2.2.3.

Теорема 6. *Если* $a<b$ *и* $b<c$, *то* $a<c$.

Доказательство легко получается из определения.

Теорема 7. $a<b$ *влечет* $a+c<b+c$.

Доказательство как для теор. 2 из 2.2.5.

Теорема 8. *Если* $a>0$ *и* $b>0$, *то* $ab>0$.

Доказательство как для теор. 3 из 2.2.5.

Определение 2. Мы пишем $a \ngtr b$, если $a>b$ невозможно, и $a \nless b$, если $a<b$ невозможно.

Заметим, что $a \ngtr b$ не то же, что ($a<b$ или $a=b$).

Так, в примере 2.2.2 $\rho \not> \frac{1}{3}$, но мы не знаем, что справедливо $\rho < \frac{1}{3}$ или $\rho = \frac{1}{3}$.

Теорема 9. Если $a \not< b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказательство. Мы можем найти натуральные числа k и n, такие, что при любом p имеет место $b_{n+p} - c_{n+p} > \frac{1}{k}$ и, далее, число $m_0 > n$, такое, что для $m > m_0$ и при любом q

$$|a_m - a_{m+q}| < \frac{1}{4k} \quad \text{и} \quad |b_m - b_{m+q}| < \frac{1}{4k}.$$

Сделаем предположение, что $a_m - c_m < \frac{1}{4k}$. Тогда $b_m > c_m + \frac{1}{k} > a_m + \frac{3}{4k}$,

$$b_{m+q} > b_m - \frac{1}{4k} > a_m + \frac{1}{2k} > a_{m+q} + \frac{1}{4k}$$

при любом q, т. е. $b > a$. Ввиду противоречия с условиями теоремы мы получаем, что $a_m - c_m \geqslant \frac{1}{4k}$, $a_m - c_m > \frac{1}{8k}$ при любом $m > m_0$, т. е. что $a > c$.

Теорема 10. Если $a > b$ и $b \not< c$, то $a > c$.

Доказательство аналогично.

Теорема 11. Если $a \not> b$ и $b \not> c$, то $a \not> c$.

Доказательство. Предположим, что $a > c$ тогда $a > b$ или $b > c$ по теор. 4.

2.2.7. *Максимум и минимум двух ЧГ*

Определение 1. *Если* $a \equiv \{a_n\}$ и $b \equiv \{b_n\}$, то $\max(a, b) \equiv \{\max(a_n, b_n)\}$ и $\min(a, b) \equiv \{\min(a_n, b_n)\}$.

Теорема 1. Если a и b суть ЧГ, то $c \equiv \max(a, b)$ и $d \equiv \min(a, b)$ — тоже ЧГ.

Доказательство. Найдем n, такое, что при любом p

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{k}, \quad |b_{n+p} - b_n| < \frac{1}{k}.$$

Предположим, что $a_n \geqslant b_n$, так что $c_n = a_n$.

Тогда $c_{n+p} \geqslant a_{n+p} > a_n - \frac{1}{k} = c_n - \frac{1}{k}$ и $a_{n+p} < a_n + \frac{1}{k}$, $b_{n+p} < b_n + \frac{1}{k} \leqslant a_n + \frac{1}{k}$, так что $c_{n+p} < c_n + \frac{1}{k}$. Отсюда следует, что последовательность $\{c_n\}$ является последовательностью Коши.

Теорема 2. $\max(a, b) \not< a$. $\max(a, b) \not< b$. $\max(a,b) = \max(b, a)$. $\min(a, b)$ имеет аналогичные свойства. $\max(a, b) \not< \min(a, b)$.

Теорема 3. Если $x > \max(a, b)$, то $x > a$ и $x > b$. Обратно, если $x > a$ и $x > b$, то $x > \max(a, b)$.

Доказательство. Первая часть теоремы следует непосредственно из того, что $\max(a, b) \not< a$ и из теор. 10 из 2.2.6. Чтобы доказать вторую часть, достаточно заметить, что из $x_{n+p} - a_{n+p} > \frac{1}{k}$ и $x_{n+p} - b_{n+p} > \frac{1}{k}$ следует

$$x_{n+p} - \max(a_{n+p}, b_{n+p}) > \frac{1}{k}.$$

Теорема 4.
$\max(a, b, 0) = \max(a, 0) \max(b, 0) + \min(a, 0) \min(b, 0)$.

Доказательство. Это равенство легко проверяется для рациональных a, b посредством разбора случаев в зависимости от знаков a и b. Для ЧГ оно следует из определений ab, $\max(a, b)$ и $\min(a, b)$.

Теорема 5. $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$.

2.2.8. *Абсолютная величина* $r\Gamma$.

Определение. Если a — rГ, то его *абсолютная величина* $|a| = \max(a, -a)$ или, что то же самое, если $a \equiv \{a_n\}$, то $|a| \equiv \{|a_n|\}$.

Замечание. График функции $y = |x|$ не является объединением двух полупрямых; он должен быть дополнен точками, для которых неизвестно, соответствуют ли они значению x, большему, меньшему или равному нулю. Это сделано посредством вышеприведенного определения, опре-

деляющего $|x|$ для любого ЧГ x. И вообще, если мы желаем рассматривать ломаную линию как непрерывную кривую, мы должны аналогичным способом дополнить ее у каждого угла.

Теорема 1. Для любых ЧГ a и b имеет место $|a| + |b| \not< |a+b|$.

Доказательство. Допустим, что $|a| + |b| < |a+b|$; тогда можно найти n и k, такие, что

$$|a_{n+p} + b_{n+p}| - (|a_{n+p}| + |b_{n+p}|) > \frac{1}{k} \quad \text{при любом } p;$$

но это невозможно ни для какого p.

Теорема 2. $|a|\,|b| = |ab|$.

Теорема 3. $|-a| = |a|$. Если $a \# 0$, то $|a^{-1}| = |a|^{-1}$.

2.3. Респектабельные действительные числа

Форм. Разрешите мне вернуться к вашему примеру двух чисел, которые дают в произведении нуль, без того, чтобы одно из них было нулем. В этом примере и в подобных ему вы используете такие действительные числа, для которых не вполне известна их упорядоченность по отношению к рациональным числам. Нельзя ли избежать этих усложнений путем ограничения арифметики такими действительными числами, которые полностью локализованы в отношении рациональных чисел, так сказать, *респектабельными* действительными числами?

Инт. Это кажется мудрым предложением, поскольку большинство действительных чисел, встречающихся в анализе, респектабельны в вашем смысле. Правда, я не думаю, что можно этим путем действительно разрешить упомянутые вами трудности, но я не буду вдаваться в этот вопрос, так как имеются более серьезные возражения. Прежде чем обсуждать их, я думаю, имеет смысл доказать, что некоторые из важнейших действительных чисел респектабельны.

Доказательство для числа e совершенно просто.

$$e = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{(частичные суммы ряда дают ЧГ).}$$

Допустим, что $e = \frac{m}{n}$.

Полагаем $s_n = \sum_0^n \frac{1}{k!}, \quad r_n = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{k!}$.

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_1^\infty \frac{(n+1)!}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!}\sum_1^\infty \frac{1}{(n+2)^{k-1}} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}.$$

$$\frac{m}{n} = s_n + r_n. \quad m(n-1)! = n! \quad s_n + n!\ r_n.$$

Последнее невозможно, ибо $n!r_n < 1/n$ и не является целым.

Класс. Вы привели хорошо известное доказательство иррациональности e, но дает ли оно отношение порядка между e и m/n?

Инт. Для этого нужно обратить последнюю часть доказательства в позитивное утверждение. Замечаем, что

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - s_n < \frac{1}{n!n},$$

$$\frac{1}{n+1} < n!\,(e - s_n) < \frac{1}{n}.$$

Так как $n!\left(\frac{m}{n} - s_n\right)$ является целым, то $\left|n!\left(e - \frac{m}{n}\right)\right| > \frac{1}{n+1}$. Это дает $\left|e - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{(n+1)!}$; следовательно, вычисляя e с достаточной степенью точности, мы сможем найти его положение по отношению к m/n.

Так, чтобы доказать респектабельность действительного числа a, достаточно дать доказательство иррациональности a, с одновременной оценкой для степени иррациональности a, т. е. с указанием арифметической функции $\varphi(n)$, такой, что $\left|a - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{\varphi(n)}$ для любых m и n.

Чтобы найти оценку иррациональности для алгебраических чисел [Брауэр, 1920, стр. 960], рассмотрим два алгебраических числа a и b; при помощи вычисления, включающего только операции над рациональными числами, находим алгебраическое уравнение

$$f(x) \equiv c_0x^n + \ldots + c_n = 0$$

с целыми коэффициентами, такое, что a и b являются его

корнями и что его дискриминант $d \neq 0$ (d — целое). Здесь $d = c_0^{2n-2} \prod_{i<k} (w_i - w_k)^2$, где $w_1 = a$, $w_2 = b$, $w_3, \ldots w_n$ — корни уравнения $f(x) = 0$. Найдем такое целое h, что $|w_i - w_k| < h$ ($i, k = 1, \ldots, n$); тогда

$$|a - b|^2 > \frac{|d|}{c_0^{2n-2} h^{n^2-n-2}}.$$

Беря в качестве b рациональное число, мы найдем оценку иррациональности a.

Все это довольно удовлетворительно, но, с другой стороны, мы не знаем, является ли эйлерова константа C рациональной, так что при настоящем уровне наших знаний она не удовлетворяет вашему условию. Еще тяжелее то обстоятельство, что сумма двух респектабельных чисел не обязана быть респектабельным числом. Приведу пример. Я задаю ЧГ следующим образом: пишите десятичное разложение π и остановитесь после первого вхождения 0123456789 или 9876543210 в это разложение; но если при этом встретилась вторая последовательность, то измените последний 0 на 1. И π и c — респектабельные числа. Для π это было доказано Брауэром [Брауэр, 1920, стр. 961]; его доказательство показывает, что для любого рационального r можно найти такое натуральное n, что $|\pi - r| > 10^{-n}$. Вычисляя π с n знаками после запятой, мы найдем отношение порядка между c и r. Но $c - \pi$ не респектабельно (по крайней мере мы этого не знаем), так как в настоящее время никто не может решить вопрос, равно ли $c - \pi$ нулю, больше его или меньше его.

В силу этого, по-видимому, непрактично ограничивать арифметику респектабельными числами. Поэтому я опускаю это понятие и возвращаюсь к определению 1 из 2.2.1.

2.4. Пределы последовательностей ЧГ

В целях полноты изложения я сформулирую определение позитивной сходимости.

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ ЧГ (*позитивно*) *сходится к пределу* a, если для любого натурального числа k можно найти натуральное число n, такое, что для любого натурального числа p

(1) $$|a - a_{n+p}| < 2^{k}.$$

Класс. В таких определениях, как это, важны не слова, а способ их понимания. Используя оборот «можно найти», вы еще раз это подчеркиваете, так как речь идет не о существовании числа, а о том, что оно должно быть эффективно известным. И еще один вопрос. Почему вы используете выражение «позитивно сходится»? Разве еще имеется понятие негативной сходимости?

Инт. Действительно, здесь, как и в случае многих других понятий, наряду с понятием позитивной сходимости, получающимся, если придать обычному определению конструктивную форму, существует еще более слабое негативное понятие, классически эквивалентное позитивному. Однако поскольку использование таких негативных понятий влечет за собой логические трудности, связанные со свойствами интуиционистского отрицания, я думаю, что лучше рассмотреть их в главе о логике (7.3.2).

Имеет место критерий сходимости Коши. Я предоставляю вам дать позитивную формулировку этого критерия и доказать, что он является необходимым и достаточным условием сходимости. Интуиционистски доказуемы также теоремы о сходимости подпоследовательности, о пределе суммы и произведения двух последовательностей и некоторые другие. Однако многие классические теоремы уже не имеют места. В качестве примера я укажу на то, что ограниченная монотонная последовательность не обязана сходиться. Простым противоречащим примером является последовательность $\{a_n\}$, определенная следующим образом: $a_n = 1-2^{-n}$, если среди первых n знаков десятичного разложения π не встречается вхождения 0123456789; $a_n = 2-2^{-n}$, если такое вхождение имеет место. Никто не знает, равен ли предел этой последовательности, если он существует, 1 или 2; поэтому мы не вправе сказать, что такой предел существует как хорошо определенный ЧГ[12].

Я не буду останавливаться на определении таких понятий, как верхний предел (наименьшая верхняя грань) последовательности. Они получаются из обычных определений посредством их позитивного истолкования.

Заметим, что $a \equiv \{a_n\}$, где a_n рациональны, влечет, что $\lim a_n = a$.

III. ПОТОКИ И ВИДЫ

3.1. Потоки

3.1.1. *Бесконечно продолжающиеся последовательности*

До сих пор мы предполагали, что ЧГ определяется законом, который по любому натуральному числу n дает полное предписание для вычисления n-го члена последовательности. Такая точка зрения оправдана при рассмотрении только изолированных ЧГ, но она становится неудовлетворительной в теории континуума как множества всех ЧГ. Понятие произвольного закона неестественно, и с ним нельзя иметь дело; оно могло бы оказаться полезным на базисе какой-нибудь формальной системы, но тогда оно не приводит к теории, в достаточной мере отвечающей нашему интуитивному представлению о континууме. Брауэр первым показал, каким именно образом можно построить удовлетворительную теорию континуума, не используя понятия произвольного закона [13].

ЧГ никогда не бывает дан в готовом виде; нам может быть задана только конечная часть последовательности. Это приводит нас к мысли, что ЧГ всегда находится в состоянии роста. Понятие закона становления существенно лишь постольку, поскольку оно гарантирует нам возможность неограниченного продолжения последовательности; значит, мы можем его исключить, постулируя эту самую возможность [Брауэр, 1919 A, стр. 3; 1920, стр. 956; 1924, стр. 245]. Поэтому под *бесконечно продолжающейся последовательностью* (сокращенно БПП) будет пониматься в точности то, что выражается этими словами, т. е. последовательность, которая может быть продолжена до бесконечности. При этом безразлично, каким образом определяются члены последовательности, посредством ли закона, свободным ли выбором, жребием ли или как-нибудь иначе. Конечно, здесь возникает два вопроса: законно

ли введение понятия БПП и полезно ли оно? Если данное понятие достаточно ясно, чтобы его можно было принять в качестве фундаментального математического понятия, то на первый вопрос можно ответить утвердительно. Но я предполагаю, что у вас имеются серьезные сомнения относительно его ясности.

Форм. Да, у меня имеются сомнения. Принимая это понятие, вы вводите в математику время и элемент субъективности. А они не относятся к математике. Бесконечно продолжающаяся последовательность продолжается во времени, и способ, которым она продолжается, зависит от выбора, т. е. от акта воли выбирающего.

Инт. Я согласен с этим, и все же, если мы просмотрим доказательства теорем арифметики действительных чисел в разделах 2.2.4 и 2.2.5, то мы увидим, что они зависят только от возможности неограниченного продолжения последовательностей; мы нигде не используем того факта, что их продолжение производилось по известному правилу; значит, можно рассматривать их продолжение, не требуя существования такого правила. Например, в определении суммы двух ЧГ (2.2.4) n-е приближение $a+b$ находится сразу после того, как будут даны n-е приближения a и b. Следовательно, если a и b — бесконечно продолжающиеся последовательности, то и $a+b$ — бесконечно продолжающаяся последовательность. Чтобы получить понятие БПП, нам не нужно вводить новые идеи, в частности понятие выбора; слово «выбор» используется здесь в качестве сокращенного обозначения порождения компоненты последовательности. Идея закона, управляющего образованием последовательности, здесь необязательна и может быть устранена процессом абстрагирования. По этой причине я прошу вас считать понятие БПП достаточно ясным [14].

Что касается зависимости БПП от понятия времени и их субъективности, то здесь необходимо дальнейшее обсуждение. Расширяя определение 1 из 2.2.1, определим ЧГ, как БПП, которая состоит из рациональных чисел и является последовательностью Коши. Здесь заслуживает специального рассмотрения условие быть последовательностью Коши. Если числа последовательности выбираются произвольно, то как мы можем заранее знать, что данная последовательность будет последовательностью Коши? Очевидно, нужно ограничить свободу выбора правилом, которое обеспечивало бы свойство Коши *до того, как де-*

лается выбор, например условием, чтобы при любых n и p выполнялось неравенство $|a_n - a_{n+p}| < \frac{1}{n}$. Если БПП подчинена только этому условию, то она автоматически будет последовательностью Коши.

Точно так же всю теорию ЧГ, изложенную в 2.2 и 2.4, можно распространить на более широкое определение ЧГ, приведенное здесь; в соответствии с этим, начиная с данного момента, мы будем применять это последнее определение.

Вообще говоря, мы исключим субъективный и временной аспекты понятия БПП, если договоримся допускать только такие рассуждения, которые применимы к последовательности независимо от того, какими окажутся еще не выбранные ее члены.

Выборы, посредством которых образуется БПП, не обязательно должны быть абсолютно свободными; их свободу можно ограничивать различными способами при условии, что на каждом шагу мы можем решить вопрос, каким компонентам разрешено появляться при следующем выборе, а каким нет. Например, условие «$|a_n - a_{n+p}| < \frac{1}{n}$ при любых n и p» удовлетворяет этому требованию, так как после выбора $a_1, \ldots, a_n$ мы знаем, какие рациональные числа допустимы при выборе a_{n+1}, а какие — нет. Брауэр допускает также, что после некоторого числа выборов можно свободным решением налагать новые ограничения на дальнейшие выборы [Брауэр, 1924, стр. 245].

3.1.2. *Определение потока*

Главная польза понятия БПП заключена в его общности. Бесконечно продолжающаяся последовательность Коши, состоящая из рациональных чисел, гораздо лучше представляет континуум ЧГ, чем последовательность, определенная неспециализированным законом; она соответствует нашей интуитивной концепции континуума как возможности постепенного определения точек. Обобщение этой идеи приводит к брауэровскому определению потока [Брауэр, 1918, стр. 3; 1924, стр. 244; 1954, стр. 8].

Поток M определен двумя законами; первый, который я буду называть *законом потока* Λ_M, управляет актами выбора натуральных чисел, в то время как действие вто-

рого или *дополнительного закона* Γ_M заключается в том, что он любой БПП, состоящей из натуральных чисел и образованной по первому закону, сопоставляет последовательность математических объектов.

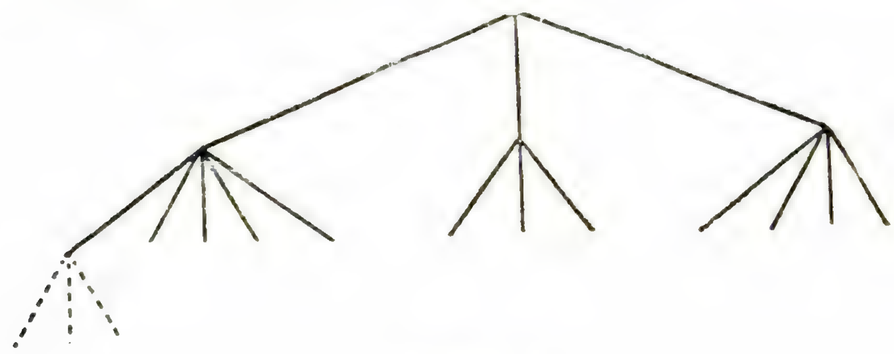


Рис. 1.

Удобно ввести следующие термины, касающиеся конечных последовательностей. Последовательность $a_1,\ldots, a_n, a_{n+1}$ является *непосредственной преемницей* $a_1,\ldots,a_n$. И обратно, $a_1,\ldots,a_n$ является *непосредственной предшественницей* $a_1,\ldots, a_n, a_{n+1}$.

Определение 1. *Закон потока* есть правило Λ, которое делит конечные последовательности натуральных чисел на допустимые и недопустимые при соблюдении следующих условий:

(1) Для любого натурального числа k можно решить посредством Λ, является ли оно членом допустимой одночленной последовательности.

(2) Если последовательность $a_1,\ldots, a_n, a_{n+1}$, то допустима, допустима и ее предшественница $a_1,\ldots, a_n$.

(3) Если дана допустимая последовательность $a_1,\ldots, a_n$, то Λ позволяет нам решать для любого натурального числа k, является ли последовательность $a_1,\ldots, a_n, k$ допустимой.

(4) Для любой допустимой последовательности $a_1,\ldots a_n$ можно найти по крайней мере одно натуральное число k, такое, что $a_1,\ldots, a_n,k$ — допустимая последовательность.

Таким образом, допустимые последовательности могут быть представлены как развертывающиеся веерообразно; см. рис. 1. Нужно только помнить, что из любой вершины может исходить бесконечное число ребер.

Определение 2. *Дополнительный закон* Γ_M потока M сопоставляет любой конечной последовательности, допустимой согласно закону потока M, некоторый математический объект.

Форм. Какие же объекты сопоставляет Γ_M допустимым последовательностям?

Инт. В теории ЧГ это — рациональные числа; вообще же они могут быть любыми ранее введенными математическими объектами.

Определение 3. БПП $\{a_n\}$, подчиненная условию, что при любом n последовательность $a_1,\ldots,a_n$ должна быть допустимой согласно закону потока Λ_M, называется *допустимой* БПП. В таком случае БПП из объектов, которые дополнительный закон сопоставляет последовательностям a_1; a_1, a_2; ...; $a_2,\ldots, a_n,\ldots$, является *элементом потока* M.

Если элемент b потока является БПП $\{b_n\}$, то мы будем называть b_n *n-й компонентой* b.

Определение 4. Два элемента потоков *равны*, если при любом n равны их n-е компоненты.

Определение 5. Два потока *равны*, если для любого элемента одного из них можно найти равный ему элемент другого потока.

Легко видеть, что отношение равенства между элементами потоков и между потоками удовлетворяет обычным условиям рефлексивности, симметрии и транзитивности[15].

3.1.3. *Примеры потоков*

(i) Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — перечисление рациональных чисел.

Λ_M: каждое натуральное число образует допустимую одночленную последовательность; если $a_1, \ldots, a_n$ — допустимая последовательность, то $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ является допустимой последовательностью тогда и только тогда, когда $|r_{a_n} - r_{a_{n+1}}| < 2^{-n}$.

Γ_M: допустимой последовательности $a_1, \ldots, a_n$ сопоставляется рациональное число r_{a_n}.

Элементы M суть ЧГ $r_{a_1}, r_{a_2}, \ldots$. По любому ЧГ c можно найти такое m, входящее в M, что $c = m$; в этом смысле M представляет собой континуум действительных чисел.

(ii) В примере (i) добавим к Λ_M условие, чтобы неравенства $0 < r_{a_n} < 1$ выполнялись при любом n. Тогда M состоит из таких ЧГ x, что $0 \not> x \not> 1$.

(iii) В примере (ii) добавим к Λ_M условие, чтобы при каждом $n > 1$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{1}{2} - r_{a_n}\right| \leqslant \left|\frac{1}{2} - r_{a_1}\right|.$$

Тогда M представляет такие ЧГ y, что $0 < y < 1$.

(iv) Λ_M: допустимы все последовательности из нулей и единиц и только они.

Γ_M: последовательности $a_1, \ldots, a_n$ сопоставляется рациональное число

$$\sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}.$$

M представляет собой поток таких ЧГ, что $0 \not> x \not> 1$, и что для каждой двоичной дроби $\frac{a}{2^n} = b$ можно доказать, что $x \not> b$ или что $x \not< b$ (такие ЧГ можно назвать двоично развертываемыми).

(v) к Λ_M примера iv добавляется следующее ограничение: если n — нечетное, то $a_n = 0$. M есть поток ЧГ, похожий на канторовский дисконтинуум.

Ясно, что, варьируя содержащиеся в Λ_M ограничения, мы можем определять различные потоки, состоящие из ЧГ.

Замечание по поводу терминологии. В своих ранних публикациях Брауэр использовал термин «Menge» для того, что здесь называется потоком. Позднее он стал избегать такие термины, как Menge, множество, класс, ансамбль, которые наводят на близкое к классической теории понимание множества как совокупности его элементов и ввел термин поток (голландское spreiding, английское spread, французское déploiement). Другое понятие, также аналогичное классическому понятию множества, вводится в следующем разделе под именем «вида». Следуя брауэровской терминологии, я использую слово «множество» неформальным образом в разъяснительных параграфах, когда я сравниваю интуиционистскую теорию с классической.

3.2. Виды

3.2.1. *Определение вида*

Для интуициониста имеются два способа определения множества: (i) посредством общего способа порождения его

элементов; это осуществляется в потоках; (ii) посредством характеристического свойства его элементов; множества такого рода называются видами.

Определение 1. *Видом* называется свойство, которым могут обладать математические объекты [Брауэр, 1918, стр. 4; 1924, стр. 245; 1952, стр. 142].

Определение 2. После того как вид S был определен, любой математический объект, определенный до S или могущий быть определенным до S и удовлетворяющий условию S, есть *член* вида S.

3.2.2. *Примеры видов*

(i) Те ЧГ, которые совпадают с данным ЧГ, образуют вид (более точно: свойство совпадения с данным ЧГ является видом; и вообще любое определение вида, данное в первой форме, нужно переформулировать таким образом); этот вид называется *действительным числом*. Если x — действительное число и ЧГ ξ — член x, то мы говорим, что ξ *представляет* x и что ξ *совпадает с* x.

(ii) Те БПП, которые равны элементам потока M, образуют вид — соответствующий *потоковид* S_M.

(iii) Все действительные числа образуют вид, который не определен как потоковид. Это (одномерный) *континуум* (действительных чисел).

(iv) Компоненты БПП ξ, состоящей из натуральных чисел, образуют вид, который мы для краткости будем отождествлять с ξ.

3.2.3. *Тип вида*

Класс. Но если вы хотите избежать круговых определений, разве вы не обязаны ввести иерархию видов, как в Principia Mathematica?

Инт. Круговые определения исключаются при помощи требования, чтобы члены S были определимы независимо от определения S. С конструктивной точки зрения это условие очевидно. Оно действительно подсказывает нам упорядочение видов, напоминающее иерархию типов. БПП и потоковиды называются видами *типа нуль*. Виды, члены которых суть виды типа нуль, являются видами *типа один*.

Определение 1. Вид называется видом *типа* n, если все его члены имеют тип, меньший чем n. Виды из примеров i, ii и iv суть виды типа нуль; вид из примера iii — вид типа один.

3.2.4. *Подвиды*

Понятие подвида данного вида определить нетрудно. Я использую символы $\in$, $\bigcup$, $\bigcap$ в их обычном смысле. $S \subseteq T$ означает, что каждый член S является членом T; $S = T$ (S *равно* T), если $S \subseteq T$ и $T \subseteq S$. Запись $a \notin S$ означает, что a не может быть членом S. Если T есть подвид S, то $S - T$ есть вид тех элементов S, которые не могут принадлежать T.

Если $T \subseteq S$, то $S' = T \bigcup (S - T)$ не всегда тождественно S, ибо S' содержит только те элементы S, для которых можно решить, принадлежат ли они T. Например, если S — вид действительных чисел, а T — вид рациональных чисел, то $S - T$ — вид иррациональных чисел в негативном смысле слова. Если неизвестно, является ли данное действительное число рациональным или нет (такова, скажем, эйлерова постоянная C), то нельзя сказать, что оно принадлежит $T \bigcup (S - T)$.

Определение 1. Если виды S и T обладают тем свойством, что S не может содержать элементов, не входящих в T, и T не может содержать элементов, не входящих в S, то S и T *конгруэнтны* [Брауэр, 1924, стр. 246].

Теорема. Если T — подвид S, то $S' = T \bigcup (S - T)$ конгруэнтно S.

Доказательство. Так как $S' \subseteq S$, то нам достаточно доказать, что S не содержит элементов, не входящих в S'. Пусть $a \in S$, но $a \notin S'$; тогда $a \notin T$, значит, $a \in S - T$ и $a \in S'$, что противоречит предположению. Следовательно, если $a \in S'$, то $a \notin S'$ невозможно.

Определение 2. Если $T \subseteq S$ и $T \bigcup (S - T)$ равно S, то T — *распознаваемый* подвид S, и S *разбивается на* T *и* $S - T$ [Брауэр, 1924, стр. 247].

Класс. Это сводится к тому, что для каждого элемента S мы можем узнать, принадлежит ли он T. Ясно, что

если T — распознаваемый подвид S, то $S - T$ — также распознаваемый подвид S.

Инт. Позвольте мне привести несколько примеров. Вид четных натуральных чисел является распознаваемым подвидом вида N — всех натуральных чисел.

Неизвестно, составляют ли показатели степеней n, при которых уравнение $x^n + y^n = z^n$ имеет нетривиальные целые решения, распознаваемый подвид N.

Позднее мы увидим (теор. 2 из 3.4.3), что у континуума нет других распознаваемых подвидов, кроме него самого и пустого вида.

3.2.5. *Отношение эквивалентности между видами*

Как обычно, два вида, между элементами которых установлено взаимно однозначное соответствие, называются *эквивалентными*. Как мы уже заметили в 2.1, построение натурального числа n состоит в последовательном образовании чисел от 1 до n; эти числа образуют вид $1 \to n$. Вид называется *конечным*, если при некотором n он эквивалентен $1 \to n$.

Определение 1. Вид, эквивалентный виду натуральных чисел N, называется *исчислимо бесконечным*.

Определение 2. Вид, содержащий исчислимо бесконечный подвид, называется *бесконечным*.

Если вид не может быть конечным, то он таким образом не обязательно бесконечен.

Определение 3. Вид, эквивалентный распознаваемому подвиду вида N, называется *нумеруемым* [Брауэр, 1918, стр. 7; 1924, стр. 248; Гейтинг, 1929, стр. 51].

Пример. Вид из пар простых близнецов $(p, p+2)$ является нумеруемым, хотя неизвестно, конечен он или бесконечен.

Я не буду касаться теории кардинальных чисел, которая во многом отличается от классической теории [Брауэр, 1924] — в частности в том, что два вида не обязаны быть сравнимыми по своим кардинальным числам. Легко дать пример вида, о котором неизвестно, пуст ли он, конечен ли или же бесконечен.

Класс. Таким видом будет вид таких n, что знаки от n-го до $n+9$-го в десятичном разложении π составляют последовательность 0123456789.

Инт. Из теор. 2 из 3.4.3 непосредственно следует, что континуум не является исчислимо-бесконечным.

3.3. Арифметика действительных чисел

3.3.1. *Отношения и операции для действительных чисел*

В 2.2. мы имели дело с арифметикой ЧГ. Вы легко получите определения равенства и неравенства для действительных чисел и доказательства основных свойств этих отношений. Далее, после очевидного определения арифметических операций теоремы арифметики действительных чисел становятся непосредственными следствиями теорем о ЧГ. Я предоставляю вам проделать эту работу.

3.3.2. *Промежутки*

Определение 1. Если a и b—действительные числа, то *замкнутый промежуток* $[a, b]$ есть вид таких действительных чисел x, что невозможно выполнение пары неравенств $x > a$ и $x > b$ и невозможно выполнение пары неравенств $x < a$ и $x < b$.

Замечание. Определение должно быть дано в этой сложной форме, так как мы можем не знать, какое из чисел a и b является бо̀льшим.

Теорема 1. Если $\max(a, b) = c$, $\min(a, b) = d$, то $[a, b] = [d, c]$.

Доказательство. Мы видели в теор. 3 из 2.2.7, что ($x > a$ и $x > b$) эквивалентно $x > c$, а это эквивалентно ($x > c$ и $x > d$); поэтому невозможность ($x > a$ и $x > b$) эквивалентна невозможности ($x > c$ и $x > d$). Проведя аналогичное рассуждение с заменой c на d, видим, что $x \in [a, b]$ эквивалентно $x \in [c, d]$.

Теорема 2. Если $a \not> b$, то $[a, b]$ есть вид действительных чисел x, удовлетворяющих условию ($x \not< a$ и $x \not> b$).

Доказательство. Хотя данное доказательство очень просто, оно может показаться трудным тем, кто не привык к применению интуиционистской логики; поэтому я приведу его несколько подробнее. Сначала предположим, что $x \nless a$ и $x \ngtr b$. Из $x \nless a$ следует, что ($x < a$ и $x < b$) невозможно; точно так же из $x \ngtr b$ следует, что ($x > a$ и $x > b$) невозможно. Поэтому $x \in [a, b]$.

Теперь предположим, что $x \in [a, b]$, и допустим, что $x < a$. Тогда ввиду $a \ngtr b$ мы получили бы $x < b$ и имели бы ($x < a$ и $x < b$), что невозможно по предположению. Таким образом, $x \nless a$. Аналогично доказывается, что $x \ngtr b$.

Следствие. Если $\max(a, b)=c$, $\min(a, b)=d$, то $[a, b]$ есть вид тех действительных чисел x, для которых $x \ngtr c$ и $x \nless d$.

3.3.3. *Канонические ЧГ*

Часто бывает удобным представлять действительные числа посредством ЧГ простой формы. Пусть действительное число x задано посредством ЧГ $\{r_n\}$. Можно найти k, такое, что $|x - r_k| < 2^{-n-3}$ и затем определить такое целое x_n, что $|r_k - x_n 2^{-n}| \leqslant 2^{-n-1}$, так что

$$(1) \qquad |x - x_n 2^{-n}| < \frac{15}{8} 2^{-n}.$$

Выполняя это для каждого n, мы построим ЧГ $\{x_n 2^{-n}\}$, равный x и обладающий свойством

$$|x_n 2^{-n} - x_{n+1} 2^{-n-1}| < \frac{5}{8} 2^{-n} + \frac{5}{16} 2^{-n} = \frac{15}{16} 2^{-n};$$

из этого следует, что

$$(2) \qquad |x_n 2^{-n} - x_{n+1} 2^{-n-1}| \leqslant 2^{-n-1}.$$

Определение. ЧГ $\{x_n 2^{-n}\}$, где x_n — целые числа и где соблюдено условие (2), называется *каноническим* ЧГ.

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. Любое действительное число x совпадает с некоторым каноническим ЧГ $\{x_n 2^{-n}\}$, удовлетворяющим условию (1).

Из доказательства ясно, что в (1) множитель $\frac{5}{8}$ можно заменить на $\frac{1}{2}+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$.

3.4. Финитарные потоки (веера)

3.4.1. *Определение*

Поток M *финитарен* (*есть веер*), если закон потока Λ_M таков, что допустимо только конечное число одночленных последовательностей и что для любой допустимой последовательности $a_1, \ldots, a_n$ имеется только конечное число значений k, таких, что $a_1, \ldots, a_n$, k — допустимая последовательность.

Букв. Скажите, является ли слово «финитарный» новым словом.

Инт. Его использовал Клини для близкого понятия. Что же касается «веера», то, хотя я и признаю использование таких новых слов в математике только в умеренных дозах, однако понятие финитарного потока — настолько важное понятие, что удобно иметь для него короткий термин.

Теорема 1. Каждый замкнутый промежуток континуума совпадает с некоторым финитарным потоком [Брауэр, 1919 A, стр. 14; 1924 B, стр. 192].

Доказательство. Пусть даны два действительных числа a и b и пусть $\max(a, b) = c$ и $\min(a, b) = d$; тогда $[a, b] = [d, c]$. Как в 3.3.3, мы строим канонические ЧГ $\{d_n 2^{-n}\}$ и $\{c_n 2^{-n}\}$, совпадающие с d и c соответственно. Можно предположить, что $d_n \leqslant c_n$, так как при $d_n > c_n$ мы имели бы также $|d - c_n 2^{-n}| < \frac{5}{8} 2^{-n}$ [16]).

Рассмотрим поток S, состоящий из канонических БПП $\{x_n 2^{-n}\}$, где x_n удовлетворяет условию

(1) $$d_n \leqslant x_n \leqslant c_n \text{ [17])}.$$

После выбора x_n, самое меньшее, одно и, самое большее, три значения допустимы для x_{n+1}, так что поток S финитарен [18]). Я докажу, что S совпадает с $[a, b]$. Из (1) видно, что каждый элемент S равен некоторому элементу $[d, c]$. И наоборот, если x — элемент $[d, c]$, то можно построить каноническую БПП $\{x_n 2^{-n}\}$, совпадающую с x.

Как раньше, для d_n и c_n можно достичь того, чтобы соблюдались условия $d_n \leqslant x_n \leqslant c_n$, так что x совпадает с одним из элементов S.

3.4.2. *Теорема о веерах*

Т е о р е м а. Если целочисленная функция $\varphi(\delta)$ определена для каждого элемента δ финитарного потока S, то, исходя из определения функции φ, можно вычислить такое число N, что $\varphi(\delta)$ будет определяться первыми N компонентами δ; т. е. если δ_1 и δ_2 — такие элементы S, что первые N компонент δ_1 совпадают с первыми N компонентами δ_2, то будем иметь $\varphi(\delta_1) = \varphi(\delta_2)$ [Брауэр, 1923, стр. 4; 1924 B, стр. 192; 1926 A, стр. 66; 1952, стр. 143; 1954, стр. 15].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Λ — закон потока S и F — вид допустимых конечных последовательностей, определяемый Λ, к которому еще добавляется пустая последовательность. Пусть K — финитарный поток, состоящий из БПП, допустимых по Λ. Удобно ввести следующую терминологию (см. также 3.1.2.).

Последовательность $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$ $(k \geqslant 1)$ является *преемницей* $a_1, \ldots, a_n$; последовательность $a_1, \ldots, a_n$ является *предшественницей* $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k}$.

БПП $\sigma = a_1, \ldots, a_n, \ldots$ является *продолжением* конечной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $a_1, \ldots, a_n$ — *началом* σ. Если σ — элемент K, то σ является K-продолжением $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Последовательность, входящая в F, называется также F-последовательностью.

Если d — элемент K, с которым посредством Γ_S соотнесен объект δ, то мы полагаем $\varphi(\delta) = f(d)$. Для всех элементов K определено f. Так как $f(d)$ должно быть вычислимым, то его значение должно определяться конечным числом компонент d, т. е. некоторой последовательностью $a(d)$ из F. Пусть C — вид последовательностей, которые таким образом соответствуют элементам из K; тогда каждый элемент K имеет начало $a(d)$ из C. Следовательно, если b — последовательность, входящая в F, то любое K-продолжение b имеет начало в C; мы выразим это свойство, говоря, что b *K-заперта* посредством C.

Очевидно, что только посредством доказательства $\mathfrak{R}$, основанного на данных теоремы, нам может стать известным тот факт, что каждая F-последовательность K-заперта посредством C. Эти же данные могут быть двух сортов, а именно

(i) вид C,

(ii) отношения между последовательностью, входящей в F, и ее непосредственными преемницами в F.

Поэтому $\mathfrak{R}$, изложенное без сокращений, состоит из конечного числа выводов, каждый из которых является либо ζ-выводом, либо $\mathfrak{F}$-выводом, где последние определяются следующим образом:

$\mathfrak{F}$-вывод: если для некоторой F-последовательности a любая непосредственная преемница a в F K-заперта посредством C, то и a K-заперта посредством C;

ζ-вывод: если для некоторой F-последовательности a непосредственная предшественница a K-заперта посредством C, то и a K-заперта посредством C.

Последний вывод $\mathfrak{R}$, доказывающий, что пустая последовательность K-заперта посредством C, должен быть $\mathfrak{F}$-выводом, так что запертость (т. е. K-запертость посредством C) для каждой одноэлементной последовательности должна быть доказана раньше, чем запертость пустой последовательности. Поэтому если запертость одноэлементной последовательности доказана при помощи ζ-вывода, то она уже была доказана в $\mathfrak{R}$, причем первый ее вывод был $\mathfrak{F}$-выводом. Отсюда следует, что можно отбросить все ζ-выводы, доказывающие запертость одноэлементных последовательностей. Кроме того, доказательству запертости одноэлементных последовательностей должно предшествовать доказательство запертости ее непосредственных преемниц. Повторяя ту же самую аргументацию для двухэлементных последовательностей и т. д., мы докажем индукцией, что из $\mathfrak{R}$ можно устранить все ζ-выводы; таким образом мы получили новое доказательство $\mathfrak{R}'$.

Далее, из $\mathfrak{R}'$ можно опустить любой $\mathfrak{F}$-вывод, который доказывает запертость какой-нибудь последовательности, принадлежащей к C или имеющей предшественниц в C или уже имеющей в $\mathfrak{R}'$ доказательство запертости. После всех этих упрощений мы получим доказательство $\overline{\mathfrak{R}}$.

Первый вывод в $\overline{\mathfrak{R}}$ должен иметь форму «любая непосредственная F-преемница F-последовательности a при-

надлежит C, значит, a K-заперта посредством C». Такой вывод мы будем называть *примитивным* выводом в $\overline{\mathfrak{R}}$. Пусть C_0 — вид таких элементов из C, которые встречаются в примитивных выводах в $\overline{\mathfrak{R}}$. Каждый непримитивный вывод в $\overline{\mathfrak{R}}$ имеет форму: «для любой непосредственной F-преемницы F-последовательности a уже доказана K-запертость посредством C, значит, и a K-заперта посредством C». Отсюда легко видеть по индукции, что если в $\overline{\mathfrak{R}}$ доказано, что a K-заперта посредством C, то a K-заперта и посредством C_0. В частности, пустая последовательность K-заперта посредством C_0.

Число шагов в $\overline{\mathfrak{R}}$ конечно; каждый шаг является $\mathfrak{F}$-выводом, использующим лишь конечное число предыдущих $\mathfrak{F}$-выводов. Отсюда следует, что количество $\mathfrak{F}$-выводов в $\overline{\mathfrak{R}}$ конечно. Число элементов C_0, встречающихся в примитивных выводах из $\overline{\mathfrak{R}}$ конечно, откуда следует, что C_0 конечно. Значит, существует конечный максимум N для длины последовательности в C_0. Это доказывает теорему.

Класс. Это замечательно простое доказательство для теоремы с такими далеко идущими следствиями.

Инт. Это — первоначальное доказательство Брауэра [Брауэр, 1926 А]; только Брауэр доказывает теорему о веерах как специальный случай общей теоремы о потоках. Вышеприведенное доказательство получено из брауэровского отбором из него всего необходимого для доказательства теоремы о веерах.

Форм. Более всего меня поражает в этом доказательстве следующее утверждение: «Очевидно, что только посредством доказательства $\mathfrak{R}$, основанного на данных теоремы, нам может стать известным тот факт, что каждая F-последовательность K-заперта посредством C». Оказывается, что математический результат доказан посредством методов, которые на языке формалистов назывались бы метаматематическими. В настоящее время использование метаматематики для получения математических результатов не является новым; простейший его пример — принцип двойственности в проективной геометрии; важные применения этого метода к алгебре были недавно сделаны А. Тарским, А. Робинсоном и Л. Хенкином [см., например, Тарский, 1950; Хенкин, 1953; Робинсон, 1951]. Однако достойно внимания, что подобные методы используются интуицио-

нистами, которым не нравится строгая формализация и которые поэтому не могут строить метаматематику в собственном смысле слова.

Инт. Это важный вопрос, касающийся природы интуиционистского доказательства вообще. Вы правы в том, что нельзя установить различие между математикой и метаматематикой, не проведя строгой формализации математики. Чтобы выяснить, в каком отношении доказательство теоремы о веерах отличается от других доказательств, нужно сделать следующее замечание. В каждой математической теореме встречается упоминание предыдущих построений. Возьмем наудачу теор. 2 из 2.2.5: для любых действительных чисел a, b и c, $a \# b$ влечет $a + c \# b + c$. Здесь в посылке $a \# b$ делается ссылка не на предположенный факт, а на предположенное построение натуральных чисел n и k, удовлетворяющих опр. 1 из 2.2.3. Теорема утверждает, что из этого построения можно получить натуральные числа, удовлетворяющие опр. 1 из 2.2.3 с заменой a и b на $a + c$ и $b + c$. Но почти в каждом случае в доказательстве участвует не само предположенное построение, а только его результат. Новой чертой доказательства теоремы о веерах является то, что в него явно вовлечена возможная форма предположенного построения. Так как мы знаем, что посылка теоремы всегда состоит в предположении о некотором уже выполненном построении, то мы не можем возражать против привлечения в качестве орудия доказательства рассмотрения возможного способа такого построения [19]).

Применения теоремы о веерах

3.4.3. *Непрерывность функций*

Наиболее важным приложением теоремы о веерах является

Т е о р е м а 1. Функция $f(x)$, определенная в любой точке замкнутого промежутка континуума и принимающая в качестве значений действительные числа, равномерно непрерывна на этом промежутке [Брауэр, 1923, стр. 5; 1924 B, D; 1926 A, стр. 67; 1954, стр. 17].

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теор. 1 из 3.4.1 промежуток $[a, b]$ совпадает с некоторым веером S. Каждому элементу ξ из S сопоставляется действительное число $y = f(\xi)$; y сов-

падает с каноническим ЧГ $\eta = \{\eta_n 2^{-n}\}$. Для фиксированного n сопоставим элементу ξ число η_n; таким путем получается целочисленная функция, определенная на S; тогда по теореме о веерах можно найти такое $N(n)$, что при любом ξ из S, η_n будет определено первыми N компонентами ξ.

Пусть теперь x_1 и x_2 — действительные числа из $[a, b]$, такие, что $|x_1 - x_2| < 2^{-N}$; тогда x_1 и x_2 совпадают с каноническими ЧГ ξ_1 и ξ_2, у которых первые N компонент одинаковы [20]).Отсюда следует, что η_n одно и то же для ξ_1 и ξ_2, следовательно,

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \frac{5}{4} 2^{-n}.$$

Таким образом, мы доказали, что из $|x_1 - x_2| < 2^{-N}$ следует $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{5}{4} 2^{-n}$. Это значит, что $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$ [21]).

Теорема 2. Если точечный вид является распознаваемым подвидом замкнутого промежутка, то он является либо пустым видом, либо всем промежутком [Брауэр, 1926 А, стр. 66] [22]).

Доказательство. Пусть точечный вид Q является распознаваемым подвидом промежутка E. Функция $f(x)$, равная 1, если x принадлежит Q, и равная 0, если x принадлежит $E - Q$, определена в каждой точке E, а потому должна быть непрерывна на E; это означает, что она является константой [23]).

Теорема 3. Функция, всюду определенная на замкнутом промежутке E, имеет на нем наименьшую верхнюю и наибольшую нижнюю границы [24]).

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что для η_n имеется только конечное число значений; пусть ζ_n — наименьшее из них. Положим $\zeta_n 2^{-n} = z_n$. Легко видеть, что $|z_n - z_{n+1}| \leqslant 2^{-n-1}$; поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ существует и является наибольшей нижней гранью для $f(x)$ [25])

Теорема 4. Если функция определена и положительна в любой точке замкнутого промежутка E, то ее наибольшая нижняя грань положительна [26]).

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 1, каждому элементу ξ из S сопоставляется канонический ЧГ

$\eta=\{\eta_n 2^{-n}\}$; $\eta > 0$, так что для некоторого числа n_1, имеем $\eta_{n_1} > 0$. n_1 — функция от ξ; по теореме о веерах можно найти такое M, что n_1 будет определено первыми M компонентами ξ. Значит, для n_1 имеется только конечное число значений; пусть n_0 — наибольшее из них. Тогда $z_{n_0} \geqslant 2^{-n_0}$. Кроме того, при любом x имеет место $f(x) > z_{n_0} - \frac{5}{8}\, 2^{-n_0}$, поэтому наибольшая нижняя грань $f(x)$ положительна.

Замечание. Нельзя утверждать, что $f(x)$ достигает своей наибольшей нижней грани в некоторой точке интервала. Проиллюстрируем это следующим примером:

$$f(x) = -3x^4 + 4cx^3 + 6x^2 - 12cx,$$

где c — действительное число, для которого неизвестно, равно ли оно нулю, больше или меньше его.

$$f'(x) = -12\,(x+1)\,(x-1)\,(x-c),$$

$$f(-1) = 3+8c,\ f(1) = 3-8c,\ f(c) = c^4 - 6c^2.$$

Наименьшая верхняя грань $f(x)$ на отрезке $[-1,1]$ равна $3+8\,|c|$, но неизвестно, принимает ли $f(x)$ это значение при $x = -1$ или при $x = 1$ [27]).

3.4.4. *Теорема Больцано — Вейерштрасса*

Брауэр исследовал эту теорему [Брауэр, 1952B].

Мы рассмотрим следующий специальный случай.

(A) Для любого ограниченного бесконечного вида действительных чисел можно найти точку накопления.

Классически это эквивалентно утверждению

(B) Каждый ограниченный вид действительных чисел, не имеющий точек накопления, конечен.

Определим так последовательность $\{a_n\}$: если среди первых n десятичных знаков в разложении π не встречается последовательность 0123456789, то $a_n = 2^{-n}$; в противном случае $a_n = 1-2^{-n}$. Вид действительных чисел a_n бесконечен, но никто не знает, какова его точка накопления, если она существует — 0 или 1. Поэтому сейчас мы не можем интуиционистски доказать предложение (A).

Что касается (B), то Брауэр показал, что нет надежды доказать даже более слабое утверждение C, приводимое ниже. Я изложу его рассуждение в 8.1.3

Определение. Вид *численно ограничен*, если известно натуральное число n, такое, что S не может содержать подвидов из n элементов.

Замечание. Каждый конечный вид численно ограничен, но обратное не обязано быть верным.

(С) Каждый ограниченный вид действительных чисел без точки накопления численно ограничен [28]).

Несколько ослабленные варианты (А) и (С) верны.

Теорема 1. Пусть Q — ограниченный бесконечный вид действительных чисел, m и n — натуральные числа. Тогда существует интервал длины 2^{-n}, содержащий по меньшей мере m элементов из Q.

Доказательство. Пусть h и k — целые числа, такие, что $h < k$ и что Q содержится в интервале (h, k). Пусть $r = (k - h + 1)\ 2^{n+1}$. Пусть R — подвид Q, содержащий rm элементов. Для каждого элемента x из R мы определим целое число x_{n+1} так, чтобы соблюдались условия $(x_{n+1} - 1)\ 2^{-n-1} < x < (x_{n+1} + 1)\ 2^{-n-1}$ [29]). Так как число интервалов $(q - 1)2^{-n-1}$, $(q + 1)2^{-n-1}$, перекрывающихся с (h, k), равно r, то по крайней мере один из них содержит не менее чем m элементов из R.

Теорема 2. Если для ограниченного вида действительных чисел Q можно найти при любом действительном x такое натуральное число $r(x)$, что промежуток $(x - 2^{-r},\ x + 2^{-r})$ не может содержать двух различных элементов из Q, то Q численно ограничен.

Доказательство. Пусть Q содержится в (h, k). Промежуток $(x - 2^{-r},\ x + 2^{-r})$, где $x \in [h, k]$, содержит промежуток $i\,(a,\ r) = (a2^{-r-1},\ \ (a+2)2^{-r-1})$, где a — целое число и где $i\,(a, r)$ содержит x [30]).

Пусть J — канонический точечный веер, совпадающий с $[h, k]$. Так как любому элементу ξ из J сопоставлены целые $r(\xi)$ и $a(\xi)$, то по теореме о веерах можно найти m, такое, что $r(\xi)$ и $a(\xi)$ зависят только от первых m выборов в построении ξ. Следовательно, только конечное число (скажем, s) различных $i(a, r)$ покрывает $[h, k]$. В силу того что никакой $i\,(a, r)$ не может содержать двух различных элементов Q, не может существовать подвид Q с $s + 1$ элементами [31]).

IV. АЛГЕБРА

4.1. *Алгебраические поля*

Я не собираюсь давать здесь связного изложения интуиционистской алгебры [Гейтинг, 1941]; цель следующих отрывков состоит главным образом в применении теории действительных чисел, однако их легко переделать для случая абстрактного алгебраического поля.

4.1.1. *Отношение отделенности*

В поле нужно вводить деление, а, как мы видели, для действительных чисел деление возможно только тогда, когда делитель отделен от 0; отсюда следует, что отношение отделенности будет существенным для определения поля.

Определение. Симметрическое отношение $\#$ между элементами вида S будем называть *отношением отделенности*, если оно обладает следующими свойствами (i) — (iii) (ср. 2.2.3), где $a, b, \ldots$ суть элементы S.

(i) Если $a \# b$, то $a = b$ невозможно.

(ii) Если $a \# b$ невозможно, то $a = b$.

(iii) Если $a \# b$, то для любого c, входящего в S, $a \# c$ или $b \# c$.

4.1.2. *Определение поля*

Математический вид F называется *полем*, если он обладает следующими свойствами: R, A1, A2, M1, M2, M3.

R. В F определено отношение отделенности $\#$.

A1. В F определено коммутативное и ассоциативное сложение; F содержит нуль и обратный для каждого из своих элементов [32]).

A2. Если $a \# b$, то для любого c из F $a + c \# b + c$.
M1. В F определено коммутативное и ассоциативное умножение, дистрибутивное по отношению к сложению; F содержит 1 и $1 \# 0$.
M2. Если $a \# 0$, то существует обратный ему элемент a^{-1} и $a^{-1} \# 0$[33]).
M3. Если $a \# b$ и $c \# 0$, то $ac \# bc$.

4.1.3. *Свойства отношения отделенности в поле*

Теорема 1. $ab \# 0$ влечет $a \# 0$ и $b \# 0$.

Доказательство. Если $ab \# 0$, то $a \# 0$ или $ab \# a$. В первом случае также и $a^{-1} \# 0$ и $(ab)\, a^{-1} \# 0$, т. е. $b \# 0$. Пусть теперь $ab \# a$, т. е. $a\,(b - 1) \# 0$. Так как $1 \# 0$, то либо $b \# 0$, либо $b - 1 \# 0$. Если $b \# 0$, то $b^{-1} \# 0$ и $(ab) b^{-1} \# 0$, т. е. $a \# 0$. Точно так же рассматриваем случай $b - 1 \# 0$.

Теорема 2. Из $a + b \# 0$ следует, что $a \# 0$, или $b \# 0$.

Доказательство. Как в теор. 5 из 2.2.5.

Теорема 3. Если $ab \# cd$, то $a \# c$ или $b \# d$.

Доказательство. $ab - cd \# 0$; $a\,(b - d) + d\,(a - c) \# 0$; по теор. 2 и 1 $b - d \# 0$ или $a - c \# 0$.

Теорема 4. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен с коэффициентами из F и $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ — такие элементы F, что $f(p_1, \ldots, p_n) \# f(q_1, \ldots, q_n)$, то по меньшей мере для одного i имеет место $p_i \# q_i$.

Доказательство. Повторным применением теоремы 2 мы найдем такой член $cx_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ в $f(x_1, \ldots, x_n)$, что $cp_1^{a_1} \ldots p_n^{a_n} \# cq_1^{a_1} \ldots q_n^{a_n}$. Затем утверждение теоремы доказывается повторным применением теоремы 3.

Форм. Эта теория алгебраических полей по существу является аксиоматической теорией.

Инт. Она иллюстрирует, как можно применять в интуиционистской математике аксиоматический метод. Нужно, однако, помнить, что он совсем не участвует в основаниях

математики; он является только удобным средством изложения теории, в которой многие теоремы имеют одну и ту же сложную систему посылок.

4.2. Линейные уравнения

Теория линейных уравнений очень хорошо иллюстрирует, каким образом можно уточнять классические теории.

4.2.1. *Правило Крамера*

Пусть d — определитель коэффициентов в левых частях системы уравнений

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Если $d \# 0$, то можно решить (1) по правилу Крамер

$$x_k = \frac{d_k}{d} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Решение единственно в следующем точном смысле:

Теорема 1. Если $p_1, \ldots, p_n$ такие числа, что для некоторого r имеет место $p_r \# d_r/d$, то можно найти такое i, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k \# b_i.$$

Доказательство. Пусть m_{ik} — алгебраическое дополнение a_{ik} в d. Мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ir} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k = dp_r,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ir}b_i = d_r,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ir} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k \# \sum_{i=1}^{n} m_{ir}b_i.$$

Тогда по теор. 2 из 4.1.3, по меньшей мере для одного значения i, имеет место

$$m_{ir} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_k \# m_{ir} b_i,$$

что доказывает теорему.

4.2.2. *m уравнений с n неизвестными. Случай известного ранга.*

Рассмотрим теперь систему m уравнений с n неизвестными

$$L_i \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Чтобы решить эту систему каким-нибудь из обычных методов, необходимо знать ранг r матрицы $A = (a_{ik})$; кроме того, должно быть возможно деление на некоторый минор порядка r. Поэтому мы определяем понятие ранга более точно.

Определение 1. Матрица A имеет *ранг* r, если по меньшей мере один из ее миноров порядка r отделен от 0 в то время, как все ее миноры порядка $r+1$ равны 0. Если d — минор порядка r и $d \# 0$, то d называется *главным минором* A.

Определение 2. *Характеристический определитель* c_s системы уравнений (2) получается из главного минора d матрицы A прибавлением строки, содержащей коэффициенты s-го уравнения (2) и столбца правых частей системы (2).

Для того чтобы система (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы каждый ее характеристический определитель был равен 0. Необходимость этого условия можно установить в более точной форме.

Теорема 1. Если некоторый характеристический определитель $c_s \# 0$, то при любых значениях $x_k = p_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ имеется i, такое, что $L_i(p_1, \ldots, p_n) \# b_i$.

Доказательство. Предположим, что главным минором является

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad \text{и что } c_s = \left|\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & d & & \vdots \\ & & & b_r \\ \hline a_{s1} & \dots & a_{sr} & b_s \end{array}\right| \# 0.$$

Возьмем произвольные значения $x_1 = p_1, \dots, x_n = p_n$. Подставляя $x_{r+1} = p_{r+1}, \dots, x_n = p_n$ в первые r уравнений и решая их относительно $x_1, \dots, x_r$, мы получаем $x_1 = q_1, \dots, x_r = q_r$,

$$L_s(q_1, \dots, q_r, p_{r+1}, \dots, p_n) - b_s = -c_s/d \# 0.$$

Поэтому

$$L_s(p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_n) \# b_s,$$

или по теор. 4 из 4.1.3 по меньшей мере для одного $k (1 \leqslant k \leqslant r)$ имеет место $p_k \# q_k$. В последнем случае по теореме 1 по меньшей мере для одного i $(1 \leqslant i \leqslant r)$

$$L_i(p_1, \dots, p_r, p_{r+1}, \dots, p_n) \# b_i.$$

Если $c_s = 0$ $(s = r + 1, \dots, m)$, то система (2) имеет решение вида

(3) $\qquad x_k = f_k(x_{r+1}, \dots, x_n) \quad (k = 1, \dots, r).$

Это решение является полным в следующем точном смысле: если $(p_1, \dots, p_n)$ — вектор, такой, что для любого вектора $(q_1, \dots, q_n)$, удовлетворяющего (3), по меньшей мере для одного k имеет место $p_k \# q_k$, то по меньшей мере для одного i имеет место $L_i(p_1, \dots, p_n) \# b_i$. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теор. 1 из 4.2.1.

4.2.3. *Случай неизвестного ранга*

Если система уравнений (2) однородна и имеет ранг r, то она имеет $(n - r)$-параметрическое решение, полное в уточненном смысле слова. Однако если этот ранг не известен, то может оказаться, что мы не сможем найти никаких решений, отделенных от нулевого, даже если все миноры порядка n равны 0. Возьмем, например, уравнение

$$ax + by = 0,$$

где a и b — такие действительные числа, что неизвестно ни что $a = 0$, ни что $a \# 0$, ни что $b = 0$, ни что $b \# 0$, причем отношение a к b тоже неизвестно. (Пример: $a = \{a_n\}$, где $a_n = 2^{-n}$, если в первых n знаках десятичного разложения π не встречается последовательности 0123456789, и где $a_n = 2^{-k}$, если имеется вхождение такой последовательности и девятка первого такого вхождения стоит на k-м месте после запятой; b определяется аналогично с заменой π на e.) Если $a \# 0$ или $b \# 0$, то $(x = b,\ y = -a)$ является решением, отделенным от (0, 0); если $a = b = 0$, то решением является любая пара чисел, отделенных от 0. Но ни первое решение не подходит ко второму случаю, ни второе решение — к первому случаю, и поскольку мы не знаем, какой случай имеет место, мы не в состоянии дать решение [34]).

4.2.4. *Однородные линейные уравнения*

Как частный случай теор. 1 из 4.2.1 мы имеем для системы уравнений

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

следующую теорему.

Теорема 1. Если ранг матрицы $A = (a_{ik})$ равен n, то для любых значений $u_1, \ldots, u_n$, таких, что $u_k \# 0$ по меньшей мере для одного k, найдется хотя бы одно i, такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k \# 0$$ [35]).

Верна также и обратная теорема.

Теорема 2. Если для любых $u_1, \ldots, u_n$, таких, что $u_k \# 0$ хотя бы для одного k, отделена от нуля хотя бы одна из левых частей системы (4), то ранг A равен n.

Доказательство ведется индукцией по n. Для одной неизвестной результат тривиален. Пусть он доказан для систем уравнений с $n - 1$ неизвестными. Полагая в (4) $x_n = 0$, мы получаем систему относительно $x_1, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющую условию теоремы, поэтому по индуктив-

ному предположению матрица из первых $n-1$ столбцов A имеет ранг $n-1$. Пусть, например, определитель d, образованный первыми $n-1$ строками, отделен от 0. Положим $x_n = 1$ и решим систему из первых $n-1$ уравнений. Результат подставим в другие уравнения (4). Левая часть по крайней мере одного из них, например t-го, будет отделена от 0. А эта левая часть равна некоторому определителю порядка n матрицы A, деленному на d.

4.3. *Линейная зависимость*

4.3.1. *Определения*

Как обычно, n-мерное векторное пространство F^n над F есть вид последовательностей $(a_1,\ldots, a_n)$ элементов F. Мы будем обозначать элементы F^n жирным шрифтом: $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$. Обычным образом определяются сложение векторов и умножение вектора на элемент из F. Что касается понятия линейной зависимости, то его можно определять двумя способами, а именно в соотношении

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0 \tag{1}$$

можно требовать, либо чтобы коэффициенты λ были отделены от 0, либо чтобы они не были равны 0; это дает понятие *сильной* и *слабой зависимости* соответственно. Поскольку первое является намного более важным, термин *зависимость* будет обозначать сильную зависимость. Система векторов, которая не может быть зависимой, называется *независимой*. Так же, как и во многих других случаях, кроме негативного понятия мы можем определить позитивное понятие, классически ему эквивалентное. Думаю, что теперь вы это сможете сделать сами.

Форм. Если по меньшей мере один из λ_i отделен от 0, то

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n \# 0.$$

Инт. В этом случае мы называем векторы (взаимно) *свободными*.

Теорема 1. Для того чтобы векторы

$$\mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{in}) \, (i = 1,2, \ldots, p)$$

были свободными, необходимо и достаточно, чтобы их матрица имела ранг p. Это — непосредственное следствие теор. 1 и 2 из 4.2.4.

4.3.2. *Теорема и противоречащий пример*

Следующая теорема требует для своей применимости дополнительного условия.

Теорема 1. Если векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ свободны и векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{r+1}$ свободны, то по крайней мере один из векторов $\mathbf{b}_i$ свободен от $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ (т. е. $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}_i$ свободны).

Доказательство. Матрица векторов $\mathbf{a}_j$ имеет ранг r; можно предположить, что определитель d, образованный из ее первых r столбцов, отделен от 0. Определим числа λ_{sk} уравнениями

$$b_{si} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{sk} a_{ki} \quad (i = 1, \ldots, r; \; s = 1, \ldots, r+1)$$

и положим

$$\mathbf{c}_s = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{sk} \mathbf{a}_k \quad (s = 1, \ldots, r+1).$$

Поскольку $\mathbf{b}_j$ свободны, имеется определитель, образованный из их компонент с индексами $j_1, \ldots, j_{r+1}$, который отделен от 0. Соответствующий определитель, образованный из c_{ik}, равен 0; значит, мы найдем по крайней мере одну пару индексов t, u, таких, что $b_{tu} \# c_{tu}$ [36]). Образуем теперь определитель порядка $r+1$, добавляя к d столбец $a_{1u}, \ldots, a_{ru}, c_{tu}$ и строку $c_{t1}, \ldots, c_{tr}, c_{tu}$. Этот определитель равен 0, а так как $d \# 0$, то соответствующий определитель с заменой c на b отделен от 0[37]). Это доказывает теорему.

Класс. Классически условие, чтобы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ были свободными, является лишним.

Инт. Именно поэтому я и обращаю ваше внимание на эту теорему; я покажу сейчас на противоречащем примере, что нет надежды доказать ее для произвольных векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$. В качестве F возьмем поле действительных чисел; положим $n = 3$, $r = 2$, $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (a, b, 1)$, где a и b суть действительные числа, такие, что ни для a, ни для b неизвестно, равны ли они 0, а также ничего неизвестно о значении a/b (см. 4.2.3). Тогда ни для какого из векторов (1,0, 0), (0, 1, 0); (0, 0, 1) мы не можем утверждать, что он свободен от $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

4.3.3. *Системы неизвестного ранга*

Если ранг системы уравнений неизвестен, то, вообще говоря, решение найти нельзя. Все же в некоторых случаях можно получить негативный результат. В качестве примера докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если каждый определитель порядка n матрицы A системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

равен 0, то невозможно, чтобы эти уравнения не имели решения, отделенного от нулевого.

Доказательство. Предположим, что не может быть решения, отделенного от нулевого; нам надо привести это предположение к противоречию.

Ранг A не равен n. Если бы он был равен $n - 1$, то имелось бы решение, отделенное от 0, следовательно, не существует определителей порядка $n - 1$ матрицы A, отделенных от 0; все они равны 0. Если бы ранг был равен $n - 2$, мы точно таким же способом могли бы получить противоречие и т. д. После n шагов мы находим, что все коэффициенты равны 0, но тогда наверняка имеется решение, отделенное от нуля. Это и есть желаемое противоречие.

V. ПЛОСКИЕ ТОЧЕЧНЫЕ ВИДЫ

5.1. Общие понятия

Мы изложим здесь теорию плоских точечных видов [Брауэр, 1919 A]. Аналогичная теория может быть развита для любого числа измерений n. Для $n = 1$ она является теорией видов действительных чисел. Хотя может показаться утомительным приводить определение всех основных понятий, включая совпадающие с обычными определениями, тем не менее это необходимо сделать, потому что почти для каждого понятия в литературе встречается несколько определений, эквивалентных классически, но не интуиционистски.

5. 1. 1. *Точечные генераторы и точки*

Определение 1. *Точечным генератором на плоскости* (сокращенно ТГ) называется упорядоченная пара (ξ_1, ξ_2) числовых генераторов.

Определение 2. *Точкой* x на плоскости называется упорядоченная пара (x_1, x_2) действительных чисел.

Я предоставляю читателю самому построить определения совпадения между двумя ТГ, между двумя точками и между ТГ и точкой.

Теорема 1. Каждый ТГ определяет одну и только одну точку, с которой он совпадает.

Определение 3. *Каноническим* ТГ называется упорядоченная пара канонических ЧГ.

Согласно доказательству теор. 1. из 3.3.3, каждая точка совпадает с каноническим ТГ.

5.1.2. *Виды и потоки*

Определение 1. ТГ-*видом* (*точечным видом*) называется вид, каждый член которого есть ТГ (точка).

Определение 2. ТГ-*потоком* называется поток, каждый элемент которого есть ТГ[38]). ТГ-поток называется *каноническим*, если каждый его элемент есть канонический ТГ.

Определение 3. Два ТГ-вида *совпадают*, если каждый член одного из них совпадает с некоторым членом другого.

Легко формулируются также аналогичные определения для отношения совпадения между A и B, где как A, так и B является ТГ-видом, или точечным видом, или ТГ-потоком.

Теорема 1. Каждый ТГ-вид, или ТГ-поток, определяет один и только один точечный вид, с которым он совпадает.

Определение 4. Два ТГ-вида *геометрически конгруэнтны*, если ни один из них не может содержать такой член, который не совпадал бы ни с одним членом другого вида. Здесь, как и в случае определения 3, нужно сформулировать аналогичные определения.

5.1.3. *Расстояние и топология*

Определение 1. *Расстоянием* $|x - y|$ между двумя точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ называется $\max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$.

Замечание. Можно было бы развить теорию также и с

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

в качестве расстояния между x и y. Вышеприведенное определение избрано ради простоты формул.

Понятия ε-окрестности и окрестности точки p можно ввести обычным путем при помощи понятия расстояния.

Определение 2. Точки x и y *отделены* одна от другой (сокращенно $x \# y$), если $x_1 \# y_1$ или $x_2 \# y_2$.

Теорема 1.

(i) Если $p \# q$, то $q \# p$.

(ii) Если $p \# q$ невозможно, то p совпадает с q.

(iii) Если p совпадает с q, то $p \# q$ невозможно.

(iv) Если $p \# q$ и q совпадает с r, то $p \# r$.

(v) Если $p \# q$, то для любой точки r имеем $p \# r$ или $q \# r$.

Все это легко доказывается при использовании свойств отношения отделенности для действительных чисел (2.2.3).

Легко формулируются аналогичные определения для отношения отделенности между двумя ТГ и между точкой и ТГ.

Определение 3. Точка p называется *точкой замыкания* точечного вида Q, если при любом n можно найти такую точку q_n из Q, что $| p - q_n | < 2^{-n}$.

Определение 4. Точка p называется *предельной точкой* для точечного вида Q, если при любом n можно найти две точки q_n и r_n из Q, такие, что $q_n \# r_n$, $| p - q_n | < 2^{-n}$ и $| p - r_n | < 2^{-n}$.

Класс. Верно ли, что точка замыкания Q является либо точкой Q, либо предельной точкой Q?

Инт. Следующий пример показывает, что эта дизъюнкция не обязана иметь место. Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом. Если среди первых n знаков десятичного разложения π не встречается последовательности 0123456789, то $a_n = 2^{-n}$; в противном случае $a_n = 0$. Пусть S — вид компонент последовательности $\{a_n\}$; 0 является точкой замыкания S, но неизвестно, входит ли 0 в S или же 0 является предельной точкой S.

Определение 5. *Замыкание* $\overline{Q}$ точечного вида Q есть вид точек замыкания Q.

Определение 6. *Производный вид* от точечного вида Q есть вид предельных точек Q.

Определение 7. Точечный вид *замкнут*, если он совпадает со своим замыканием.

Теорема 2. Замыкание и производный вид точечного вида замкнуты.

Доказательства просты.

Теорема 3. Всякая предельная точка замыкания Q принадлежит производному виду от Q.

Доказательство. Пусть p — предельная точка $\overline{Q}$; тогда для любого n можно найти такие точки q_n и r_n из $\overline{Q}$, что $q_n \# r_n$, $|p - q_n| < 2^{-n-1}$ и $|p - r_n| < 2^{-n-1}$. Далее, можно найти такое m, что $|q_n - r_n| > 2^{-m}$, $m > n$ и такие точки q'_n, r'_n из Q, что $|q'_n - q_n| < 2^{-m-2}$ и $|r'_n - r_n| < 2^{-m-2}$. Тогда $|q'_n - r'_n| > 2^{-m-1}$, так что $q'_n \# r'_n$, $|p - q'_n| < 2^{-n}$ и $|p - r'_n| < 2^{-n}$. Этим доказывается, что p — предельная точка Q.

5.1.4. *Открытые виды, области и областные дополнения*

Можно определить открытые точечные виды как точечные виды, состоящие только из внутренних точек. Тогда дополнение к открытому точечному виду будет замкнуто, но дополнение замкнутого точечного вида не обязательно будет открытым: для одного измерения точка 0 образует замкнутый точечный вид; тогда его дополнением является вид точек, отличных от 0, а открытый вид образуется точками, отделенными от 0. Это понятие открытого вида включает в себя, однако, такие патологические случаи, как следующий. Пусть S означает квадрат $|p - x| < 1$, если эйлерова константа рациональна, и квадрат $|q - x| < \frac{1}{2}$ в противном случае, где p и q — различные точки. Чтобы избежать таких случаев, мы заменим понятие открытого вида на более конструктивное понятие *области* [Брауэр, 1918, стр. 8; 1919A, стр. 20]. Это понятие совсем просто, но точную формулировку его определения можно будет привести лишь после некоторой подготовки.

В последующем E будет обозначать либо всю плоскость, либо прямоугольник с рациональными вершинами и сторонами, параллельными осям координат. Во втором случае будут рассматриваться только точки E, причем сам E будет считаться замкнутым точечным видом даже в том случае, если это не будет особо оговариваться. Пред-

полагается, что E выбрано раз и навсегда и остается фиксированным до конца главы.

Определение 1. *Элементарное множество прямоугольников* есть конечное множество прямоугольников с рациональными вершинами и сторонами, параллельными осям координат. Не допускаются прямоугольники, выродившиеся в прямолинейный отрезок. Буквы V, W, X, Y, Z будут всегда обозначать элементарные множества.

Определение 2. *Рациональный элементарный домен* $R(V)$ есть вид рациональных точек, лежащих внутри или на границе по крайней мере одного из прямоугольников V. *Внешним рациональным доменом* $R^*(V)$ называется вид рациональных точек, не лежащих внутри $R(V)$ («внутри» берется относительно вида рациональных точек).

Ясно, что значит выражение «V лежит внутри W». Поскольку встречаются только рациональные точки, не возникает никаких интуиционистских трудностей.

Определение 3. *Элементарный домен* αV есть то же, что $\overline{R(V)}$; *внешний элементарный домен* $\alpha^* V$ есть то же, что $\overline{R^*(V)}$.

Теорема 1. $\alpha^* V = \overline{E - \alpha V}$.

Доказательство. (i) Если $p \in \alpha^* V$, то p является предельной точкой для последовательности рациональных точек в $E - \alpha V$, т. е. $p \in \overline{E - \alpha V}$.

(ii). Если $p \in \overline{E - \alpha V}$, то для любого n можно найти точку p_n в $E - \alpha V$, такую, что $|p - p_n| < 2^{-n-1}$ и, далее, рациональную точку q_n, такую, что $|p_n - q_n| < 2^{-n-2}$. Точка p_n содержится в квадрате $|q_n - x| < 2^{-n-2}$; обозначим этот квадрат через σ. Если бы σ содержался в V, то имело бы место $p_n \in \alpha V$, что ложно. Значит, часть σ лежит вне V (вспомним, что в этой части доказательства мы говорим только о рациональных точках). Пусть r_n — рациональная точка из σ, лежащая вне V; тогда $r_n \in R^*(V)$ и $|p_n - r_n| < 2^{-n-1}$, так что $|p - r_n| < 2^{-n}$. Последовательность $\{r_n\}$ показывает, что $p \in \alpha^* V$.

Замечание. Если E прямоугольник, то $\alpha^* V = \alpha W$, где V и W вместе составляют E и не имеют общих внутренних точек. В этом случае мы говорим, что V и W

просто покрывают E. Там, где не нужно бояться двусмысленности, мы будем иногда опускать α и обозначать элементарный домен αV через V. Здесь, однако, необходима известная осторожность, как показывает следующий пример. Пусть V состоит из квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, а W — из квадрата с вершинами $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(1,2)$ и пусть X — множество из двух этих квадратов. Тогда αX не то же самое, что $\alpha V \bigcup \alpha W$, так как точка (p_1, p_2), где $0 < p_1 < 1$, но где неизвестно, имеет ли место $p_2 \not> 1$ или $p_2 \not< 1$, принадлежит αX, но нельзя сказать, что она принадлежит $\alpha V \bigcup \alpha W$.

Этот пример одновременно показывает, что формула $\overline{Q \bigcup R} = \overline{Q} \bigcup \overline{R}$, вообще говоря, не имеет места.

Определение 4. *Областью* называется объединение последовательности $\{V_n\}$ элементарных доменов, таких, что V_n лежит внутри V_{n+1} при любом n. (Если E — прямоугольник и если часть λ границы V_n лежит на границе E, то допускается, чтобы λ лежала на границе V_{n+1}.)

Каждая область является открытым видом; дополнение каждой области является замкнутым видом. Для многих целей вместо понятия замкнутого вида удобно использовать понятие *óбластного дополнения* (т. е. дополнения к области).

Замечание об обозначениях. Для обозначения областей используются буквы A, B, C с индексами или без них; для обозначения элементарных множеств прямоугольников и элементарных доменов — буквы V, W, иногда X, Y, Z; для обозначения óбластных дополнений — буквы M, N; для обозначения неспециализированных точечных видов — буквы Q, R. Таким образом при использовании буквы A предполагается известным, что речь идет об области. $A = \{V_n\}$ означает, что последовательность $\{V_n\}$ удовлетворяет условию опр. 4 и что $A = \bigcup\limits_n V_n$.

Теорема 2. Если $A = \{V_n\}$, то

$$E - A = \bigcap_{m=1}^{\infty} (E - V_m) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(E - V_m)} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \alpha^* V_m.$$

Доказательство (i). Если $p \in E - A$, то $p \notin V_m$ при любом m, так что

$$p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} (E - V_m) \text{ и } p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{(E - V_m)}.$$

(ii). Теперь пусть $p \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \alpha^* V_m$. При любом фиксированном n имеем $p \in \alpha^* V_{n+1}$. Пусть d — минимум расстояния между точками относительных границ V_n и V_{n+1} [39]. Можно найти такую рациональную точку q вне V_{n+1}, что $|p - q| < \frac{1}{2} d$; далее для любой рациональной точки r из V_n имеет место $|p - r| > \frac{1}{2} d$ [40], так что $p \notin V_n$. Поскольку n — произвольно, p не принадлежит ни одному V_n, т. е. $p \in E - A$.

Эта теорема показывает, что понятие областного дополнения может считаться конструктивным, несмотря на свою негативность.

Теорема 3. Если невозможно, чтобы p не принадлежала $E - A$, то p принадлежит $E - A$.

Доказательство. Это непосредственно следует из того факта, что $E - A$ определено посредством отрицания.

Букв. Какую странную логику вы применяете здесь?

Инт. На самом деле я не применяю здесь логики; я не мог бы этого сделать, потому что я ее еще не развивал. Но мой довод действительно можно назвать логическим, поскольку он касается структуры суждения. Я скажу об этом более подробно.

Пусть ρ будет сокращением для «$p \in A$»; тогда отрицание $\neg \rho$ есть «$p \in (E - A)$». Вышеприведенная теорема утверждает, что $\neg\neg\neg \rho$ влечет $\neg \rho$. Это очевидно, так как если дано $\neg\neg\neg \rho$, то предположение истинности ρ ведет к $\neg\neg \rho$, а потому к противоречию [см. также 7.1.6.2. (5)].

5.1.5. *Объединение и пересечение*

Теорема 1. Объединение конечной или бесконечной последовательности областей является областью [Брауэр, 1919 A, стр. 22].

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность областей $A_n = \{V_{nk}\}$. Положим $W_r = \bigcup_{m=1}^{r} V_{mr}$; тогда область B, определенная посредством $\{W_r\}$ есть $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$.

Т е о р е м а 2. Если при некотором n элементарные домены V_n и W_n имеют общий прямоугольник, то пересечение областей $A = \{V_n\}$ и $B = \{W_n\}$ есть область.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X — прямоугольник, содержащийся как в V_n, так и в W_n. Пусть $V_{n+p} \cap W_{n+p} = Y_p$ для каждого p; тогда последовательность $\{Y_p\}$ определяет область C, совпадающую с $A \cap B$.

Т е о р е м а 3. Пересечение конечной или бесконечной последовательности óбластных дополнений является óбластным дополнением, а именно:

$$\bigcap_n (E - A_n) = E - \bigcup_n A_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. «$x \in \bigcap_n (E - A_n)$» означает что при любом n точка x не принадлежит A_n.

«$x \in (E - \bigcup_n A_n)$» означает, что при любом n точка x не принадлежит A_n. Оба высказывания означают одно и то же.

Объединение двух óбластных дополнений не всегда является óбластным дополнением; оно даже не обязано быть замкнутым, как это проиллюстрировано на примере, приведенном вслед за теор. 1 из 5.1.4. Элементарные домены V и W, определенные там, являются óбластными дополнениями; точка p, которую я там рассматривал, является точкой замыкания $V \cup W$.

Так же, как в указанном примере, из V и W был образован элементарный домен X, можно любой паре (или конечному числу) óбластных дополнений сопоставить некоторое óбластное дополнение.

О п р е д е л е н и е. Если $M = \bigcap_n \alpha^* V_n$ и $N = \bigcap_n \alpha^* W_n$, то

$$M \overset{*}{\cup} N = \bigcap_n \alpha^* (V_n \cap W_n).$$

$M \overset{*}{\cup} N$ является óбластным дополнением при условии, что для некоторого n в $V_n \cap W_n$ содержится квадрат.

Теорема. Если A и B — области, такие, что $A \cap B$ тоже область (теор. 2), то $(E - A) \overset{*}{\bigcup} (E - B) = E - (A \cap B)$.

Доказательство ясно из определений.

5.2. Локализованные точечные виды

5.2.1. *Локализованные точечные виды и веера*

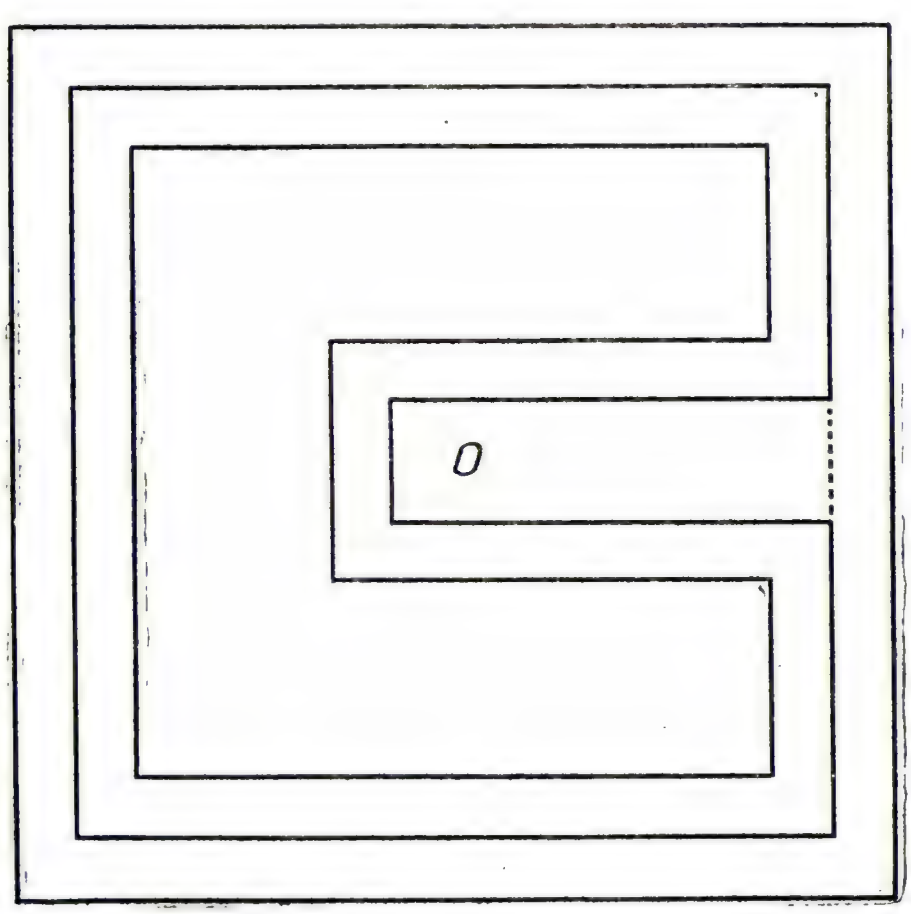
Определение 1. *Расстоянием* точки p от точечного вида Q (обозначаемым $\rho(p, Q)$) называется наибольшая нижняя грань расстояний от p до точек из Q. Поэтому $\rho(p, Q)$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) для любого q из Q имеет место $|p - q| \not< \rho$;

(ii) для любого натурального n можно найти точку q_n из Q, такую, что $|p - q_n| < \rho + 2^{-n}$.

Определение 2. Точечный вид Q *локализован* [Брауэр 1919 А, стр. 13], если для любой точки можно вычислить $\rho(p, Q)$.

Замечание. Ясно, что $\rho(p, Q)$ является непрерывной функцией p; поэтому, если можно вычислить расстояние от каждой рациональной точки до Q, то Q локализован.



П р и м е р. Пусть E — квадрат с вершинами $(\pm 1, \pm 1)$ и пусть A — область, определенная при помощи последовательности $\{V_n\}$, получаемой так: если среди первых n десятичных знаков после запятой в десятичном разложении π не встречается последовательность 0123456789, то V_n состоит из трех прямоугольников с противоположными вершинами

$$(-1+2^{-n}, \ -1+2^{-n}) \quad \text{и} \quad (1-2^{-n}, \ -2^{-n})$$
$$(-1+2^{-n}, \ -2^{-n}) \quad \text{и} \quad (-2^{-n}, \ +2^{-n})$$
$$(-1+2^{-n}, \ +2^{-n}) \quad \text{и} \quad (1-2^{-n}, \ 1-2^{-n})$$

соответственно; в противном случае V_n является квадратом с вершинами $\pm(1-2^{-n})$.

Пусть теперь p — рациональная точка. Либо $p \in E$ и тогда $\rho(p, A) = 0$, либо p лежит вне E, тогда $\rho(p, A) = \rho(p, E)$.

Поэтому A локализован. Однако $M = E - A$ не локализован, так как $\rho(O, M) = 0$, где O — точка $(0, 0)$, если в разложение π не входит последовательность 0123456789, но $\rho(O, M) = 1$ в противном случае.

Т е о р е м а 1. Каждый ограниченный замкнутый и локализованный точечный вид совпадает с некоторым финитарным ТГ-потоком (ТГ-веером) [Брауэр, 1919А, стр. 14].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Q — ограниченный, замкнутый и локализованный точечный вид. Для удобства точки $(a2^{-n}, \ b2^{-n})$, где a и b — целые числа, будем называть *узлами n-решетки*. При $n = 1, 2, 3 \ldots$ мы разделим узлы n-решетки на *недопустимые и допустимые* таким образом, чтобы для каждого p, являющегося допустимым узлом n-решетки, мы бы имели $\rho(p, Q) < \frac{5}{8} \ 2^{-n}$, а для каждого q, являющегося недопустимым узлом n-решетки, имели бы $\rho(q, Q) > 2^{-n-1}$. Это можно сделать в силу теор. 4 из 2.2.6. Если p является допустимым узлом n-решетки, то можно найти такую точку q из Q, что $|p - q| < \frac{5}{8} \ 2^{-n}$, а затем такую точку r, являющуюся узлом $(n+1)$-решетки, что $|q - r| < \frac{5}{8} \ 2^{-n-1}$.

Имеем $\rho(r, Q) < \frac{5}{8} \cdot 2^{-n-1}$, так что r может быть взята как допустимый узел $(n+1)$-решетки и $|p-r| < 2^{-n}$. Рассмотрим поток S всех канонических ТГ $\{p_n\}$, где p_n является допустимым узлом n-решетки. После выбора p_n существует по меньшей мере одна и по большей мере девять возможностей для выбора допустимого p_{n+1}. Значит, S является ТГ-веером. Мы докажем, что S совпадает с Q.

(i) Если $p \in Q$, то некоторый канонический ТГ для p принадлежит S.

(ii) Пусть s — точка, которая совпадает с ТГ s_0 в S. Имеем $s_0 = \{p_n\}$, где p_n — допустимый узел n-решетки. $|s_0 - p_n| \ngtr 2^{-n}$ и можно найти такую точку q_n из Q, что $|p_n - q_n| < 2^{-n}$. Следовательно, $|s_0 - q_n| < 2^{-n+1}$. Поскольку каждое q_n принадлежит Q, то s_0 является точкой замыкания для Q и входит в него в силу его замкнутости [41]).

Королларий. Пусть q и r — точки ограниченного замкнутого локализованного точечного вида Q, такие, что $|q-r| < 2^{-n-3}$, и пусть s есть середина отрезка qr. Можно найти такой узел n-решетки p_n, что $|s-p_n| < 9 \cdot 2^{-n-4}$. Тогда $|q-p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$ и $|r-p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$. Отсюда следует, что p_n является допустимым узлом n-решетки [42]). Мы доказали следующую лемму.

Лемма. Если q и r — точки ограниченного замкнутого локализованного точечного вида Q, такие, что $|q-r| < 2^{-n-3}$, то ТГ-веер S, совпадающий с Q, содержит два элемента, совпадающие с q и r соответственно и при том такие, что у них одни и те же первые n компонент $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Теорема 2. Замыкание любого канонического точечного веера совпадает с некоторым локализованным областным дополнением.

Доказательство. Пусть H — множество n-х компонент элементов S; H является конечным множеством узлов n-решетки. Вокруг каждой точки множества H опишем квадрат со стороной длины $3 \cdot 2^{-n}$ и с центром в этой

точке. Пусть V_n — множество этих квадратов. Положим $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$; тогда M является областным дополнением. Очевидно, что S геометрически содержится в M; так как M замкнуто, то и $\bar{S}$ геометрически содержится в M. Я докажу сейчас, что и M геометрически содержится в $\bar{S}$.

Пусть q — точка M. Тогда $q \in V_n$ и поэтому можно найти такую точку p_n из H, что $|q - p_n| < 2^{-n+1}$.

Точка p_n является компонентой по крайней мере одного ТГ из S, скажем компонентой ТГ s_n; $|s_n - p_n| \not> 2^{-n}$. Таким образом, для каждого n мы найдем такой ТГ s_n из S, что $|q - s_n| < 2^{-n+2}$; поэтому q является точкой замыкания для S.

Нужно еще доказать, что M локализовано. Пусть p — какая-нибудь точка плоскости. Положим $\rho(p, V_n) = \rho_n$. Из построения V_n и V_{n+1} очевидно, что $\rho_n \not> \rho_{n+1} \not> \rho_n + \frac{5}{4} 2^{-n}$. Поэтому существует $\lim \rho_n = \rho_0$ и $\rho_0 - \rho_n \not> \frac{5}{2} 2^{-n}$.

Я хочу доказать, что $\rho(p, M) = \rho_0$, т. е. что

(i) если $q \in M$, то $|p - q| \not< \rho_0$;

(ii) при любом n можно найти такую точку q_n в M, что

$$|p - q_n| < \rho_0 + 2^{-n}.$$

Доказательство (i). $q \in V_n$, значит, $|q - p| \not< \rho_n \not< \rho_0 - \frac{5}{2} 2^{-n}$ при любом n, т. е. $|q - p| \not< \rho_0$.

Доказательство (ii). Мы можем последовательно найти квадрат a из V_n, такой, что $\rho(p, a) < \rho_n + 2^{-n}$, и точку r из a, такую, что $|p - r| < \rho_n + 2 \cdot 2^{-n}$. Тогда $|p - r| < \rho_0 + \frac{9}{2} 2^{-n}$ [43]).

Следствие 1. Из двух предшествующих теорем следует, что каждый ограниченный замкнутый локализованный точечный вид совпадает с некоторым областным дополнением.

Теорема 3. Вещественная функция, определенная в каждой точке ограниченного замкнутого локализованного точечного вида, равномерно непрерывна на нем.

Т е о р е м а 4. Вещественная функция, определенная в каждой точке ограниченного замкнутого локализованного точечного вида, имеет на нем наименьшую верхнюю и наибольшую нижнюю грани.

Т е о р е м а 5. Если вещественная функция определена и положительна в каждой точке ограниченного замкнутого локализованного точечного вида, то ее наибольшая нижняя грань положительна.

Доказательства этих теорем в точности аналогичны доказательствам из 3.4.3 [44]).

5.2.2. *Интуиционистская форма теоремы Гейне — Бореля*

Т е о р е м а. Пусть Q — ограниченный замкнутый локализованный точечный вид. Если каждой точке p из Q сопоставлена ее окрестность $U(p)$, то можно найти конечное множество $U(q_1), \ldots, U(q_m)$ этих окрестностей таким образом, что Q содержится в $\bigcup\limits_{k=1}^{m} U(q_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению окрестность $U(p)$ содержит квадрат $|p - x| < 2^{-h}$, где h — натуральное число, зависящее от p. Пусть S — канонический точечный веер, совпадающий с Q. Если точка p из Q совпадает с ТГ $p' = \{p'_n\}$ из S, то свяжем h с p'. По теореме о веерах можно найти максимальное значение h_0 для h такое, что при любом p в $U(p)$ содержится квадрат $|p - x| < 2^{-h_0}$. Точки $(h_0 + 1)$-решетки, которые являются компонентами элементов S, можно расположить в конечную последовательность $p'_{h_0+1, i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m_0)$. Для каждого из значений i можно найти некоторый фиксированный элемент S, скажем q'_i, в котором встречается $p'_{h_0+1,i}$. Пусть q_i — точка из Q, совпадающая с q'_i. Тогда

$$|q_i - p'_{h_0+1,i}| < \frac{5}{8} 2^{-h_0-1}.$$

Произвольная точка r из Q совпадает с элементом $r = \{r'_n\}$ из S; $r'_{h_0+1} = p'_{h_0+1,\, i}$ при некотором i, откуда

$| r - p'_{h_0+1, i} | < \frac{5}{8} 2^{-h_0-1}$. Отсюда следует неравенство: $| q_i - r | < \frac{5}{8} 2^{-h_0}$, т. е. что $r \in U(q_i)$. Это означает, что $U(q_1) \cup \ldots \cup U(q_m)$ содержит Q.

Замечание. Брауэр [1926 C, стр. 867] доказал эту теорему в более общей форме (для так называемых локализованно-компактных видов) [45]).

VI. МЕРА И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В этой главе E будет обозначать квадрат $|x - 0| \not> \frac{1}{2}$.

6. 1. *Измеримые области и областные дополнения.*

6.1.1. *Измеримые области*

Определение. *Мерой*, обозначаемой mV, элементарного домена V является его площадь в обычном смысле слова. Если область A определена последовательностью $\{V_n\}$ элементарных доменов и существует $\lim\limits_{n\to\infty} mV_n$, то область A *измерима* и ее *мера* есть $mA = \lim\limits_{n\to\infty} mV_n$ [Брауэр, 1919А, стр. 26].

Класс. При таком определении даже не всякая ограниченная область будет измеримой.

Инт. Это непосредственно следует из того факта, что ограниченная монотонная последовательность вещественных чисел не обязательно сходится.

Следующая теорема имеет менее простое доказательство, чем это можно было бы ожидать.

Теорема 1. Если A и B измеримые области и $A \supseteq B$, то $mA \not< mB$.

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 1. Если элементарный домен W содержится в области $A = \{V_n\}$, то можно найти такое m, что W покрывается V_m.

Доказательство. Каждой точке p из W можно сопоставить натуральное число $h(p)$, такое, что $p \in V_{h(p)}$. Поскольку W ограничено, замкнуто и локализовано, то по теор. 1. из 5.2.1 и по теореме о веерах следует, что

для значений $h(p)$ имеется максимум m; каждая точка W принадлежит V_m[46]).

Доказательство теоремы 1. Пусть $A = \{V_n\}$, $B = \{W_n\}$. Для данного k мы сначала найдем n, такое, что $mB - mW_n < 2^{-k}$; затем (с помощью леммы) найдем m так, чтобы V_m покрывало W_n. Тогда $mA > mV_m \geqslant mW_n > mB - 2^{-k}$. Так как это имеет место при любом k, то $mA \not< mB$[47]).

Теорема 2. Если область A совпадает с областью B и если A измерима, то B измерима и $mA = mB$[48]).

Доказательство. Пусть $A = \{V_n\}$, $B = \{W_n\}$. В силу леммы 1 для каждого n имеем $mW_n < mA$. С другой стороны, поскольку A измерима, то при данном k можно найти i, такое, что $mV_i > mA - 2^{-k}$, а затем, используя лемму, найти n, такое, что W_h покрывает V_i. Имеем тогда $mW_h \not< mA - 2^{-k}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} mW_n = mA$.

Теорема 3. Если A и B — измеримые области, то область $C = A \bigcup B$ измерима и $mC \not> mA + mB$.

Доказательство легко получается из определений.

6.1.2. *Измеримые о́бластные дополнения*

Определение 1. Если M является о́бластным дополнением, а именно дополнением к измеримой области A, то M *измеримо* и его *мера* mM равна $1 - mA$.

Теорема 1. Если M_1 и M_2 являются измеримыми о́бластными дополнениями, $mM_1 = m_1$, $mM_2 = m_2$, $m(M_1 \bigcap M_2) = m$, то $m_1 + m_2 \not> 1 + m$.

Доказательство. $M_1 = E - A_1$, $M_2 = E - A_2$, $M_1 \bigcap M_2 = E - (A_1 \bigcup A_2)$.
В силу теор. 3 из 6.1.1 имеем

$$m(A_1 \bigcup A_2) \not> mA_1 + mA_2,$$
$$1 - m \not> 1 - m_1 + 1 - m_2,$$
$$m_1 + m_2 \not> 1 + m.$$

Теорема 2. [Брауэр, 1919 A, стр. 26]. Всякое измеримое о́бластное дополнение положительной меры

содержит такое локализованное областное дополнение L, что $mL > mM - 2^{-p}$, где p — любое заданное натуральное число.

Доказательство. Имеется последовательность $\{V_n\}$ элементарных доменов, такая, что $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Из этой последовательности выберем подпоследовательность $\{W_n\}$, такую, что $mW_n - mM < 2^{-4n-p}$ при любом n. L строится теперь следующим образом. Разделим E на квадраты с ребрами длины 2^{-n}. Эти квадраты назовем $\varkappa_n$-квадратами. Из каждого W_n удалим его пересечения с теми $\varkappa_1$-квадратами, у которых пересечения с W_1 имеют меру, меньшую чем 2^{-p-3}. Остаток обозначим через W'_n. Из каждого W'_n удалим его пересечения с теми $\varkappa_2$-квадратами, у которых пересечения с W'_2 имеют меру, меньшую чем 2^{-p-7}, и продолжим этот процесс. Вообще, $W_n^{(k+1)}$ $(n > k)$ получается из W_n^k удалением его пересечений с теми $\varkappa_{k+1}$-квадратами, у которых мера пересечений с W_{k+1}^k меньше $2^{-p-4k-3}$.

Положим

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n^{(n)}.$$

В силу теор. 3 из 5.1.5 L является областным дополнением. Согласно построению $mW_n - mW_{n+1} < 2^{-4n-p}$. Тем более

$$mW_n^{(n)} - mW_{n+1}^{(n)} < 2^{-4n-p}.$$

При переходе от $W_{n+1}^{(n)}$ к $W_{n+1}^{(n+1)}$ мера удаленных частей составляет самое большее $2^{2n+2} \cdot 2^{-p-4n-3} = 2^{-p-2n-1}$, так что $mW_n^{(n)} - mW_{n+1}^{(n+1)} < 2^{-4n-p} + 2^{-p-2n-1} < 2^{-p-2n}$. Отсюда следует, что существует $\lim mW_n^{(n)}$.

Здесь еще нельзя заключить, что $\lim mW_n^{(n)} = mL$, потому что $W_{n+1}^{(n+1)}$ не обязательно лежит строго внутри $W_n^{(n)}$. Однако при помощи небольшого расширения каждого из W_n^n мы легко построим последовательность $\{U_n\}$ таких элементарных доменов, что U_{n+1} всегда лежит строго внутри U_n, что $L = \bigcap U_n$ и что $\lim mU_n = \lim mW_n$.

Поэтому L измеримо и $mL = \lim mW_n^{(n)}$. Из построения $W_n^{(n)}$ мы видим, что

$$mW_n - mW_n^{(n)} < \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k+2} 2^{-p-4k-3} < \frac{2}{3} \cdot 2^{-p}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$mM - mL < 2^{-p}.$$

Остается показать, что L локализовано. Пусть $\varkappa'$— один из $\varkappa_n$-квадратов, имеющих положительное пересечение с $W_n^{(n)}$. Тогда, по вышеприведенному построению, мера этого пересечения больше или равна $2^{-p-4n+1}$. Так как $mW_n^{(n)} - mW_{n+1}^{(n)} < 2^{-p-4n}$, то $m(W_{n+1}^{(n)} \cap \varkappa') > 2^{-p-4n+1} - 2^{-p-4n} = 2^{-p-4n}$. Переходя от $W_{n+1}^{(n)}$ к $W_{n+1}^{(n+1)}$, мы удаляем из $\varkappa'$ самое большее площадь в $4 \cdot 2^{-p-4n-3}$, так что $W_{n+1}^{(n+1)}$ имеет часть, общую с $\varkappa'$; следовательно, $W_{n+1}^{(n+1)}$ имеет общую часть по крайней мере с одним из $\varkappa_{n+1}$ квадратов, входящих в $\varkappa'$. Продолжая этот процесс, мы найдем последовательность $\{q_h\}$, каждый член которой является $\varkappa_{n+h}$ квадратом и такую, что при любом h вид $W_{n+h}^{(n+h)}$ имеет общую часть с q_h. Пусть $x^{(h)}$ — точка из $W_{n+h}^{(n+h)} \cap q_h$. Последовательность $\{x^{(h)}\}$ сходится к точке x_0. Так как $x^{(j)} \in W_{n+h}^{(n+h)}$ при любом $j \geqslant h$, то $x_0 \in U_{n+h}^{(n+h)}$. В силу того что это выполняется при любом h, имеем $x_0 \in L$. Таким образом у каждого $\varkappa_n$-квадрата, имеющего положительное пересечение с $W_n^{(n)}$, есть по крайней мере одна общая точка с L.

Пусть H_n — множество $\varkappa_n$-квадратов, имеющих положительное пересечение с $W_n^{(n)}$. L содержится в H_n и вместе с тем каждый квадрат из H_n имеет по меньшей мере одну общую точку с L. Поэтому для любой рациональной точки p имеем $\rho(pH_n) \not> \rho(pL) \not> \rho(p, H_n) + 2^{-n}$[49]).

Этим доказано, что L локализовано.

Королларий. Из данного доказательства следует, что всякое ограниченное областное дополнение положительной меры содержит по крайней мере одну точку.

Теорема 3. Если измеримое о́бластное дополнение M содержится в элементарном домене V, то $mM \not> mV$.

Доказательство. $M = \bigcap W_n$[50]). Допустим, что $mM > mV$. Можно найти такое q, что $mM > mV + 2^{-q}$; тогда при любом n имеем $mW_n > mV + 2^{-q}$. Пусть U_n — часть W_n, лежащая вне V. $mU_n > 2^{-q}$. Отрезая от каждого U_n небольшую полоску вдоль границы V, мы получим T_n. Это можно сделать таким образом, чтобы T_{n+1} содержалось внутри T_n и чтобы при любом n имело место неравенство $mT_n > 2^{-q}$. Пусть $\bigcap T_n = N$. Тогда N — измеримое о́бластное дополнение и $mN \not< 2^{-q}$[51]). Значит, в силу последнего короллария N содержит по крайней мере одну точку p. Ясно, что p не может принадлежать V, так что предположение $mM > mV$ приводит к противоречию.

6.1.3. *Пренебрежимые и почти полные точечные виды.*

Определение 1. Точечный вид, который можно включить в измеримую область произвольно малой меры, называется *пренебрежимым.*

Определение 2. Точечный вид, который при любом n содержит в себе о́бластное дополнение с мерой, большей чем $1 - 2^{-n}$, называется *почти полным.* Если некоторое свойство выполняется на почти полном виде, то будем говорить, что оно выполняется *почти всюду.*

Дополнение к пренебрежимому точечному виду Q почти полно, так как $Q \subseteq A$ влечет $E - A \subseteq E - Q$. Обратное не всегда справедливо, так как из $E - A \subseteq R$ следует, что $E - R \subseteq E - (E - A)$, но последний вид не обязан совпадать с A и мы не знаем, является ли он областью[52]).

Теорема 1. Пересечение двух почти полных видов есть почти полный вид.

Доказательство. Пусть Q и R — почти полные виды, M и N — о́бластные дополнения с мерой, большей чем $1 - 2^{-n}$, содержащиеся в Q и R соответственно. Тогда $M \cap N \subseteq Q \cap R$. Пусть $m(M \cap N) = m$. По теор. 1 из 6.1.2.

$$1 - 2^{-n} + 1 - 2^{-n} < 1 + m;\ \ m > 1 - 2^{-n+1}.$$

Замечание. Если V — элементарный домен, то V — областное дополнение и внутренность V есть область той же меры. Граница V является областным дополнением и имеет меру 0. Она может быть заключена в измеримую область A с мерой, меньшей чем 2^{-n}, которую можно выбрать так, чтобы для некоторого s каждая точка, отстоящая от границы менее чем на 2^{-s}, входила в A.

Пусть W — элементарное множество прямоугольников, которое вместе с V просто покрывает E. Для произвольной точки p из $E - A$ можно решить, аппроксимируя ее с точностью до 2^{-s}, принадлежит ли она V или W.

Интеграл Брауэра

Я разовью теорию интегрирования для случая функций, определенных на подвиде Q единичного квадрата E. Возможны различные обобщения, но им не место в этом введении.

6.2. Ограниченные измеримые функции

6.2.1. *Определение интеграла*

Определение 1. Ограниченная функция $f(x)$, определенная на подвиде Q вида E, *измерима* [Брауэр, 1923, стр. 6], если при любом натуральном n выполняются следующие условия:

(i) задана измеримая плоская область A_n с мерой, меньшей чем 2^{-n};

(ii) E просто покрывается элементарными доменами

$$V_{nh}\ (h = -l_n, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, k_n);$$

(iii) если $M_n = E - A_n$, то

(a) при $x \in V_{nh} \cap M_n$ и $h \neq 0$ имеем

$$(h-1)2^{-n-1} \ngtr f(x) \ngtr (h+1)2^{-n-1},$$

(b) при $x \in Q \cap V_{n0} \cap M_n$ имеем

$$-2^{-n-1} \ngtr f(x) \ngtr 2^{-n-1}.$$

Множество трехмерных промежутков

$$x \in V_{nh}, (h-1)2^{-n-1} \ngtr z \ngtr (h+1)\, 2^{-n-1}$$
$$(h = -ln, \ldots, 0, \ldots, k_n)$$

будет называться n-й *аппроксимирующей полосой* для $f(x)$ $f(x)$ будет называться *измеримой* посредством $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$.

Определение 2. *Интеграл* от измеримой функции $f(x)$ определяется так:

$$(1) \qquad \int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 2^{-n-1} \sum_{=-l_n}^{k_n} hmV_{nh} \text{ [53]}.$$

Замечания. 1. Если предполагать, что $A_{n+1} \subseteq A_n$ при всяком n, то это не дает никаких новых ограничений. В самом деле, если положить $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = B_{n-1}$ и $W_{n-1,h} = V_{n,2h}$, то $f(x)$ также окажется измеримой посредством $\{B_n\}$ и $\{W_{nk}\}$ [54]. Последовательность $\{W_{nk}\}$ даст при этом тот же самый интеграл. Аналогичным образом мы можем предположить, что границы всех V_{nh} содержатся в A_n, ибо если $mA_n < 2^{-n} - 2^{-n'}$, то можно включить эти границы в измеримую область C_n с мерой, меньшей чем $2^{-n'}$, и затем использовать $A_n \bigcup C_n$ вместо A_n. Этот способ имеет то преимущество, что для каждой точки из $E - (A_n \bigcup C_n)$ можно определить, к которому из элементарных доменов V_{nh} она принадлежит [55].

2. Часто бывает удобным изменить пункт (ii) определения 1 следующим образом:

(ii bis) E просто покрывается элементарными доменами $V_{nh}^{(p)}$; каждый $V_{nh}^{(p)}$ содержится в одном из $V_{n-1,j}^{(q)}$.

В этом случае в пункт (iii) вместо $V_{nh} \bigcap M_n$ нужно подставить $\bigcup\limits_p (V_{nh}^{(p)} \bigcap M_n)$.

Класс. Это — хорошо известное определение интеграла Лебега.

Инт. Конечно это так, но ведь нужно было выбрать одно конструктивное определение среди всех классически возможных. Пусть, например, $f(x)$ определена на E и имеет постоянное значение a, где a — действительное число, для которого не известно, ни что $a < \frac{1}{2}$, ни что $a = \frac{1}{2}$, ни что $a > \frac{1}{2}$. В этом случае вид точек, в которых $f(x) < \frac{1}{2}$, неизмерим. Я могу сказать это сейчас, хотя

еще и не привел общего определения измеримых точечных видов. Конечно, то же замечание применимо и к соотношениям $f(x)=\frac{1}{2}$ и $f(x)>\frac{1}{2}$.

Важное различие состоит в том, что математик-классик всегда может расширить область определения своей функции до E, полагая ее равной 0 в каждой точке, в которой она не определена. Интуиционистски это недопустимо, так как относительно некоторых точек может быть неизвестно, определена ли в них функция. Брауэровское определение измеримой функции сформулировано таким образом, что для любой такой функции мы почти всюду знаем либо, что она определена, либо что если она определена, то она меньше чем 2^{-n}, где n может быть взято произвольно.

Точечный вид, на котором $f(x)$ определена, будет называться *доменом* $f(x)$.

Т е о р е м а 1. Предел (1) существует для всякой измеримой функции $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x)$ измерима посредством $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$. Предположим, что A_n удовлетворяют условиям замечания 1.

Пусть p — любое натуральное число, большее чем n, и пусть $V_{nh} \cap V_{pk} = W_{hk}$. Будем обозначать W_{hk} посредством X_{hk}, если $|h2^{-n-1} - k2^{-p-1}| < 2^{-n}$, и посредством Y_{hk}, если $|h2^{-n-1} - k2^{-p-1}| \geqslant 2^{-n}$.

Ясно, что

$$(2) \qquad 2^{-p-1}\sum_k kmV_{pk} - 2^{-n-1}\sum_h hmV_{nh} = \\ = \sum_{h,k} (k\,2^{-p-1} - h\,2^{-n-1})\,mW_{hk}.$$

Из определений следует, что при $x \in V_{nh} \cap M_n$ $(h \neq 0)$ имеем

$$(3) \qquad (h-1)2^{-n-1} \not> f(x) \not> (h+1)2^{-n-1}$$

и что при $x \in V_{pk} \cap M_p$ $(k \neq 0)$ имеем

$$(4) \qquad (k-1)2^{-p-1} \not> f(x) \not> (k+1)2^{-p-1}.$$

Следовательно, при $x \in W_{hk} \cap M_n \cap M_p$ имеем

(5) $$|h 2^{-n-1} - k 2^{-p-1}| \not> 2^{-n-1} + 2^{-p-1} < 2^{-n}.$$

Это верно также при $h = 0, k \neq 0$ и при $h \neq 0$, $k = 0$, ибо в первом случае, например, $V_{pk} \cap M_p \subseteq Q$, так что $W_{ok} \cap M_p \cap M_n \subseteq Q$, и (3) выполняется на $W_{ok} \cap M_p \cap M_n$. При $h = k = 0$ (5) тривиально.

Каждая точка из $M_n \cap M_p$ принадлежит некоторому W_{hk}; в силу (5) оно не может оказаться Y_{hk}. Значит, $M_n \cap M_p \subseteq X_{hk}$.

Далее, по теор. 1 из 6.1.2.

$$m\,(M_n \cap M_p) \not< 1 - 2^{-n} - 2^{-p} > 1 - 2^{-n+1}.$$

Значит, $m \bigcup X_{hk} > 1 - 2^{-n+1}$ и $m \bigcup Y_{hk} < 2^{-n+1}$.

Поэтому, если $|f(x)| < M$, то

(6) $$\sum_{h,k} |k\ 2^{-p-1} - h\ 2^{-n-1}|\ mY_{hk} < (2M + 2)\ 2^{-n+1}$$ [54])

(7) $$\sum_{h,k} |k\ 2^{-p-1} - h\ 2^{-n-1}|\ mX_{hk} < 2^{-n}\ m \bigcup X_{hk} \not> 2^{-n}.$$

Из (2) следует

(8) $$|\,2^{-p-1}\ \Sigma kmV_{pk} - 2^{-n-1}\,\Sigma hmV_{nh}| < (4M + 5)\,2^{-n}.$$

Применяя критерий Коши из 2.4, видим, что предел (1) существует [56]).

Т е о р е м а 2. Если ограниченная функция $f(x)$ измерима с помощью $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$, а также с помощью $\{W_{nk}\}$ и $\{B_n\}$, то

(9) $$\lim_{n\to\infty} 2^{-n-1}\,\Sigma hmV_{nh} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n-1}\,\Sigma kmW_{nk}.$$

Пусть $A_n \cup B_n = C_n$ и $E - C_n = M_n$. Можно предположить, что C_n содержит границы V_{nh} и W_{nk}. Положим $V_{nh} \cap W_{nk} = X_{hk}$, если $|h - k| \leqslant 1$ и $V_{nh} \cap W_{nk} = Y_{hk}$, если $|h - k| > 1$. Точка из Y_{hk} не может принадлежать M_n, так что $M_n \subseteq \bigcup X_{hk}$. Следовательно, по теор. 3 из 6.1.2

$$mM_n \not> m \bigcup X_{hk}.\quad m \bigcup X_{hk} \geqslant 1 - 2^{-n+1}.\quad m \bigcup Y_{hk} \leqslant 2^{-n+1}$$

$$|2^{-n-1}\Sigma hmV_{nh}-2^{-n-1}\Sigma kmV_{nk}| = 2^{-n-1}|\Sigma (h-k)\, mX_{hk}$$
$$+\Sigma (h-k)\, mY_{hk}| \leqslant 2^{-n-1}(\Sigma mX_{hk}+2M\,\Sigma mY_{hk})$$
$$\leqslant 2^{-n-1}+2M\cdot 2^{-n+1}=(4M+1)\cdot 2^{-n}$$ [57]).

Это доказывает (9).

6.2.2. *Условия измеримости*

Теорема 1. Почти всюду определенная ограниченная функция измерима [Б. ван Роотселар, 1954, стр. 7] [58]).

Доказательство. По условию $f(x)$ определена на виде Q и при каждом n вид Q содержит измеримое óбластное дополнение M_n, такое, что $mM_n > 1-2^{-n-3}$.

По теор. 2 из 6.1.2 M_n содержит локализованное óбластное дополнение L_n, такое, что $mL_n > 1-2^{-n-2}$. Пусть A'_n такова, что $L_n = E - A'_n$. Применяя теор. 3 из 5.2.1, мы видим, что $f(x)$ равномерно непрерывна на L_n, так что для каждой точки x из L_n можно найти такую окрестность $U_n(x)$, что $|f(x)-f(x')| < 2^{-n-3}$, если x' лежит в $U_n(x)\cap L_n$. $U_n(x)$ содержит элементарный домен $V_n(x)$, внутри которого лежит x. К L_n можно применить теорему Гейне — Бореля из 5.2.2, в силу которой имеется конечное число доменов V_{ni} $(i = 1, \ldots, m)$, покрывающих L_n.

Определим следующим образом непересекающиеся элементарные домены W_{ni}:

$$W_{n1}=V_{n1},\quad W_{ni}=\overline{V_{ni}-\bigcup_{k=1}^{i-1}(V_{ni}\cap W_{nk})}.$$

Общая площадь, покрываемая W_{ni}, составляет по меньшей мере $1-2^{-n-2}$; остающуюся часть E можно включить в измеримую область A_n с мерой, меньшей чем 2^{-n-1}. Включим границы W_{ni} в измеримую область B_n с мерой, меньше чем 2^{-n-2}, и положим $C_n = A_n\cup B_n\cup A'_n$, так что $mC_n < 2^{-n}$. Тогда $f(x)$ измерима посредством $\{W_{ni}\}$ и $\{C_n\}$ [59]).

Мы покажем сейчас, что, с другой стороны, каждую измеримую функцию можно пополнить до почти всюду определенной измеримой функции с тем же самым интегралом.

Определение 1. $g(x)$ называется *пополнением* $f(x)$, если удовлетворяются следующие условия:

(i) $g(x)$ почти всюду определена,

(ii) $g(x) = f(x)$ в каждой точке, в которой определены обе функции,

(iii) $f(x)$ определена в каждой точке, где $g(x) \neq 0$.

Теорема 2. Если $f(x)$ измерима посредством $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$, то функция $g(x)$, определенная ниже, является пополнением $f(x)$.

$$g_n(x) = h2^{-n-1} \text{ на } V_{nh} \cap (E - A_n);$$
$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Теорема 3. Если $g(x)$ — пополнение ограниченной измеримой функции $f(x)$, то $g(x)$ измерима и

$$\int g(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Теорема 4. Если существует пополнение $f(x)$, то $f(x)$ измерима.

Доказательства этих теорем получаются непосредственно из определений. В доказательстве теор. 4 мы используем теор. 1, чтобы доказать измеримость пополнения $f(x)$.

Теорема 5. Если $f(x)$ измерима, $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и $f(x) = g(x)$ почти всюду, то $g(x)$ измерима и $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ измерима посредством $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$ и пусть B_p — область с мерой, меньшей чем 2^{-n}, такая, что $f(x) = g(x)$ на $E - B_n$. Тогда $g(x)$ измерима посредством $\{V_{n,h}\}$ и $\{A_{n+1} \cup B_{n+1}\}$ и утверждение теоремы получается из определения [60]).

6.2.3. *Суммы и произведения измеримых функций*

Теорема 1. Если ограниченные измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же домен Q или определены почти всюду, то $f(x) + g(x)$ измерима и

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x) + g(x))\,dx.$$

Доказательство. Пусть $f_0(x)$ и $g_0(x)$ суть пополнения $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Тогда $f_0(x) + g_0(x)$ является пополнением $f(x) + g(x)$. Равенство интегралов легко получается на основе опр. 1 из 6.2.1.

Теорема 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ — ограниченные измеримые функции, то функция $f(x) \cdot g(x)$ измерима.

Доказательство. Здесь так же: если $f_0(x)$ и $g_0(x)$ суть пополнения $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то $f_0(x) \cdot g_0(x)$ есть пополнение $f(x) \cdot g(x)$.

Замечание. Заметим, что в теор. 2 нет надобности предполагать, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют тот же самый домен, как это сделано в теор. 1. Причина в том, что из $f_0(x) \cdot g_0(x) \# 0$ следует как $f_0(x) \# 0$, так и $g_0(x) \# 0$, в то время как $f_0(x) + g_0(x) \# 0$ влечет только, что $f_0(x) \# 0$ или $g_0(x) \# 0$. Домен $f(x) \cdot g(x)$, конечно, является пересечением доменов $f(x)$ и $g(x)$.

Определение 1. *Неотрицательная часть* $f^+(x)$ и *неположительная часть* $f^-(x)$ функции $f(x)$ определяются следующим образом:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0); \; f^-(x) = \min(f(x), 0).$$

$f^+(x)$ и $f^-(x)$, очевидно, имеют тот же домен, что $f(x)$ и

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x).$$

Теорема 3. Если $f(x)$ ограничена и измерима, то $f^+(x)$ и $f^-(x)$ измеримы и

$$\int f^+(x)\,dx + \int f^-(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Доказательство. Если $f_0(x)$ — пополнение $f(x)$, то $\max(f_0(x), 0)$ является пополнением $f^+(x)$; аналогичный результат имеет место и для $f^-(x)$. Функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ имеют тот же домен, что $f(x)$, так что мы можем завершить доказательство, применяя теор. 1.

Теорема 4. Если $f(x)$ ограничена и измерима, то $f(x)|$ измерима.

Доказательство $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$.

6.2.4. *Предельная теорема*

Определение 1. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ *сходится в точке* x_0, если известно такое число N, что $f_n(x_0)$ определены при $n > N$ и последовательность $f_{N+n}(x_0)$ сходится в обычном смысле.

Теорема 1. Если функции последовательности $\{f_n(x)\}$ измеримы и равномерно ограничены и если эта последовательность почти всюду сходится к $f(x)$, то $f(x)$ измерима и

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx \text{ [61]}.$$

Доказательство. Для каждого m можно найти такое óбластное дополнение M_m, что $mM_m > 1-2^{-1}$ и что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ существует в каждой точке M_m. M_m содержит локализованное óбластное дополнение L_m с мерой, большей чем $1-2^{-m}$. Для каждой точки x из L_m можно найти число $N(x)$, такое, что $f_n(x)$ определена при $n > N(x)$ и что $|f(x)-f_n(x)| < 2^{-m}$ при $n > N(x)$. В силу теор. 1 из 5.2.1 и теоремы о веерах мы можем найти максимальное значение $N(x)$. Обозначим его через N_1. Мы видим, что при $n > N_1$ функция $f_n(x)$ определена и $|f(x)-f_n(x)| < 2^{-m}$ для каждого x из L_m. В последующем я буду предполагать, что $n > N_1$.

L_m есть дополнение к области B_m. Пусть $f_n(x)$ измерима посредством $\{V_{nph}\}$ и $\{A_{np}\}$. Полагаем $C_{nm} = A_{nm}\cup B_m$, $K_{nm} = E - C_{nm}$. Имеем $mC_{nm} < 2^{-m+1}$.

При $x \in V_{nmh}\cap K_{nm}$ имеем $|f(x)-f_n(x)| < 2^{-m}$ и далее

$$(1)\quad (h-1)\,2^{-m-1} - 2^{-m} \mathrel{\not>} f(x) \mathrel{\not>} (h+1)2^{-m-1} + 2^{-m}.$$

Затем мы можем найти такое k, что

$$(2)\qquad (k-1)2^{-m+2} \mathrel{\not>} f(x) \mathrel{\not>} (k+1)2^{-m+2}.$$

Здесь

$$(3)\qquad |k2^{-m+2} - h2^{-m-1}| \leq 2^{-m+1} \text{ [62]}.$$

Это доказывает, что $f(x)$ измерим посредством $\{V_{nmh}\}$ и $\{C_{nm}\}$, где n является функцие от m [63].

Из неравенства (8) в доказательстве теор. 1 из 6.2.1. мы получаем, что

(4) $$\left|\int f(x)\,dx - 2^{-m+2}\Sigma\, kmV_{nmh}\right| < (4M+5)\ 2^{-m+3};$$

(5) $$\left|\int f_n(x)\,dx - 2^{-m-1}\Sigma\, hmV_{nmh}\right| < (4M+5)\ 2^{-m}.$$

Из (3) получаем

(6) $$|\,2^{-m+2}\Sigma\, kmV_{nmh} - 2^{-m-1}\Sigma hmV_{nmh}\,| \not< \Sigma\,|\,2^{-m+2}k - 2^{-m-1}h\,|\,m\,V_{nmh} \not< 2^{-m+1}\Sigma mV_{nmh} \not< 2^{-m+1}.$$

Из (4), (5) и (6) мы убеждаемся, что

(7) $$\left|\int f(x)\,dx - \int f_n(x)\,dx\right| < (36M+47)\ 2^{-m}.$$

Так как это верно при любом $n > N(m)$, то теорема доказана [64]).

6.3. *Измеримые точечные виды*

6.3.1. *Основные понятия*

Определение 1. *Характеристическая функция* $f_Q(x)$ точечного вида Q определяется следующим образом: $f_Q(x) = 1$, если $x \in Q$; $f_Q(x) = 0$, если $x \notin Q$ [65]).

Определение 2. Точечный вид Q *измерим*, если $f_Q(x)$ измерима; *мера* Q есть $mQ = \int f_Q(x)\,dx$.

Теорема 1. Определение 2 эквивалентно следующему определению: вид Q измерим, если при любом n можно найти такой элементарный домен V_n и такую измеримую область A_n, что $mA_n < 2^{-n}$ и $Q \cap (E - A_n) = V_n \cap (E - A_n)$. Тогда $mQ = \lim\limits_{n\to\infty} mV_n$ [Брауэр, 1919А, стр. 29]. В этом случае мы будем говорить, что Q измерим посредством $\{V_n\}$ и $\{A_n\}$.

Доказательство. (i) Если $f_Q(x)$ измерима посредством $\{W_{nh}\}$ и $\{A_n\}$, то Q измерим посредством

$$\{W_{n,\,2^{n+1}-1} \overset{*}{\bigcup} W_{n,\,2^{n+1}} \overset{*}{\bigcup} W_{n,\,2^{n+1}+1}\} \text{ и } \{A_n\}.$$

(ii) Если Q измерим посредством $\{V_n\}$ и $\{A_n\}$, то $f_Q(x)$ измерима посредством $\{W_{nh}\}$ и $\{A_n\}$, где $W_{n,\,2^{n+1}} = V_n$, $W_{n0} = E - V_n$ и остальные W_{nh} пусты.

Теорема 2. Если Q измерим, то $Q \bigcup (E - Q)$ является почти полным видом.

Доказательство. Пусть $f_Q(x)$ измерима посредством $\{W_{nh}\}$ и $\{A_n\}$. Для краткости положим $X_n = W_{n,\,2^{n+1}}$. Предположим, что A_n содержит границы X_n и W_{n0}, так что каждая точка из $E - A_n$ принадлежит либо X_n, либо W_{n0}. Пусть $E - A_n = M_n$. Тогда $Q \bigcap M_n = X_n \bigcap M_n$.

Если $x \in W_{n0} \bigcap M_n$, то $f_Q(x) \neq 1$. Значит, $x \notin Q$ и $x \in E - Q$. Следовательно,

$$W_{n0} \bigcap M_n = (E - Q) \bigcap M_n.$$

Значит,

$$(Q \bigcup (E - Q)) \bigcap M_n = (X_n \bigcup W_{n0}) \bigcap M_n = M_n$$
$$Q \bigcup (E - Q) \supseteq M_n$$ [66]).

6.3.2. *Условия измеримости*

Теорема 1. Если вид Q измерим, то вид $E - Q$ измерим и $m(E - Q) = 1 - mQ$ [Брауэр, 1919 A, стр. 30].

Доказательство. Как в предыдущем доказательстве, мы найдем такое M_n, чтобы имело место $Q \bigcup (E - Q) \supseteq M_n$ и $mM_n > 1 - 2^{-n}$. Тогда при любом n на M_n имеет место равенство $f_Q(x) + f(x) = 1$. Следовательно, почти всюду $f_Q(x) + f_{E-Q}(x) = 1$. Значит,

$$\int f_Q(x)\,dx + \int f_{E-Q}(x)\,dx = \int dx = 1.$$

Следствие. Если вид Q измерим, то вид $E - (E - Q)$ измерим и имеет ту же самую меру. Это обстоятельство очень удобно, так как оно часто позволяет нам пренебрегать в теории меры двойным отрицанием.

Т е о р е м а 2. Каждый измеримый вид Q содержит при любом n локализованное о́бластное дополнение L_n с мерой, большей чем $mQ - 2^{-n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Q измерим посредством $\{V_n\}$ и $\{A_n\}$, пусть, далее, $E - A_n = M_n$. Можно найти такое $k = k(n) > n + 1$, что $|mV_k - mQ| < 2^{-n-2}$. Имеем также $mM_k \nless 1 - 2^{-n-2}$. В силу теор. 1 из 6.1.2

$$mV_k + mM_k \ngtr 1 + m(M_k \cap V_k),$$
$$m(M_k \cap V_k) \nless mV_k + mM_k - 1 > mQ - 2^{-n-2}$$
$$+ 1 - 2^{-n-2} - 1 = mQ - 2^{-n-1}.$$

О́бластное дополнение $M_k \cap V_k$ содержит в себе локализованное о́бластное дополнение L_n, такое, что $mL_n > m(M_k \cap V_k) - 2^{-n-1}$. Таким образом $mL_n > mQ - 2^{-n}$. Так как $M_k \cap V_k = Q \cap M_k \subset Q$, то теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Для того чтобы точечный вид Q был почти полным, необходимо и достаточно, чтобы Q был измерим и имело место равенство $mQ = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Условие необходимо, так как, если Q почти полн, то $f_Q(x)$ определена почти всюду, а значит, по теор. 1 из 6.2.2, $f_Q(x)$ измерима и почти всюду $f_Q(x) = 1$. Следовательно, $mQ = 1$.

(ii) Условие достаточно в силу предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 4. Точечный вид Q измерим тогда и только тогда, когда $Q \cup (E - Q)$ почти полный точечный вид.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Условие необходимо в силу теор. 2 из 6.3.1.

(ii) Условие достаточно. Это доказывается, как пункт (i) предыдущего доказательства.

Т е о р е м а 5. Каждый распознаваемый подвид R измеримого вида Q измерим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $Q \cup (E - Q) \subseteq R \cup (E - R)$, ибо каждый элемент Q принадлежит либо R, либо $E - R$ и $E - Q \subseteq E - R$. Поэтому ввиду того, что вид $Q \cup (E - Q)$ почти полн, вид $R \cup (E - R)$ также почти полн и вид R измерим.

С л е д с т в и е. Если вид $Q \cup (E - Q)$ измерим, то Q также измерим.

Т е о р е м а 6. Если виды Q и R измеримы и $R \subseteq Q$, то $mQ = mR + m(Q - R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристические функции $f_Q(x)$, $f_R(x)$ и $f_{Q-R}(x)$ определены на почти полном виде

$$(Q \cup (E - Q)) \cap (R \cup (E - R))$$

и на нем $f_Q(x) = f_R(x) + f_{Q-R}(x)$. Это и доказывает теорему.

Т е о р е м а 7. Если Q и R — геометрически конгруэнтные измеримые точечные виды, то $mQ = mR$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $E - Q = E - R$, так что $1 - mQ = 1 - mR$.

6.3.3. *Объединение и пересечение измеримых точечных видов*

Т е о р е м а 1. Если Q и R — измеримые точечные виды, то $Q \cap R$ и $Q \cup R$ также измеримы, $m(Q \cup R) \not> mQ + mR$ и если Q и R не пересекаются, то $m(Q \cup R) = mQ + mR$ [Брауэр, 1919А, стр. 32].

Д о к а з а т е л ь с т в о. $f_{Q \cap R}(x)$ и $f_{Q \cup R}(x)$ определены на почти полном виде $(Q \cup (E - Q)) \cap (R \cup (E - R))$ и на этом виде $f_{Q \cap R}(x) = f_Q(x) \cdot f_R(x)$ и $f_{Q \cup R}(x) \not> f_Q(x) + f_R(x)$; если Q и R не пересекаются, то $f_{Q \cup R}(x) = f_Q(x) + f_R(x)$.

Т е о р е м а 2. Если $\{Q_n\}$ — последовательность измеримых точечных видов, $S_n = \bigcup\limits_{h=1}^{n} Q_h$, $m_n = mS_n$ и существует $\lim\limits_{n \to \infty} m_n = m$, то вид $S_\omega = \bigcup\limits_{h=1}^{\infty} Q_h$ измерим и и $mS_\omega = m$ [Брауэр, 1919А, стр. 33].

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теор. 2 из 6.3.1 можно найти для любого Q_n такую измеримую область B_n, что $mB_n < 2^{-h-n}$ и что $Q_n \cup (E - Q_n) \supseteq E - B_n$. Положим $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, тогда $mB < 2^{-h}$.

Определим теперь числа $n_1, n_2, \ldots$ так, чтобы соблюдались условия $m - m_{n_1} < 2^{-h-2}$, $m - m_{n_2} < 2^{-h-3}$ и т. д. [67]) Затем найдем измеримые области $C_1, C_2, \ldots$, такие, что $mC_i < 2^{-h-i}$ и $E - C_i \subseteq E - (S_{n_{i+1}} - S_{n_i})$ [68]). Положим $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ и $D = B \bigcup C$. Ясно, что $mC < 2^{-h}$ и $mD < 2^{-h+1}$. Пусть x — точка вида $E - D$. Тогда при любом n имеем $x \in E - B_n$, так что $x \in Q_n$ или $x \in E - Q_n$; следовательно, $x \in S_{n_1}$ или $x \in E - S_{n_1}$. Если $x \in S_{n_1}$, то $x \in S_\omega$.

Предположим теперь, что $x \in E - S_{n_1}$. Так как $x \in E - C_1$, то x не принадлежит $S_{n_2} - S_{n_1}$, так что $x \in E - S_{n_2}$.

Аналогично, в силу $x \in E - C_2$ мы получаем $x \in E - S_{n_3}$ и т. д. Отсюда следует, что $x \in E - S_\omega$. Мы доказали, таким образом, что каждая точка из $E - D$ принадлежит S_ω или $E - S_\omega$. Таким образом, f_{S_ω} определена на $E - D$. Кроме того, на $E - D$ имеем $\lim\limits_{n \to \infty} f_{S_n} = f_{S_\omega}$. Теперь теорема следует из 6.2.4.

Т е о р е м а 3. Если $\{Q_n\}$ — последовательность измеримых точечных видов, $R_n = \bigcap_{h=1}^{n} Q_h$, $mR_n = m_n$ и существует $\lim\limits_{n \to \infty} m_n = m$, то вид $R_\omega = \bigcap_{h=1}^{\infty} Q_h$ измерим и $mR_\omega = m$ [Брауэр, 1919А, стр. 33].

Д о к а з а т е л ь с т в о почти дословно воспроизводит доказательство предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 4. Всякая измеримая область или о́бластное дополнение (6.1.1 или 6.1.2) является также измеримым точечным видом (по определению из 6.3.1), и две соответствующие меры равны [Брауэр, 1919А, стр. 30].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для области это непосредственно следует из теоремы 2; для о́бластного дополнения это имеет место в силу теор. 1 из 6.3.2.

Т е о р е м а 5. Если $f(x)$ ограниченная измеримая функция, определенная на точечном виде Q, и если p — любое натуральное число, то можно найти такие

непересекающиеся измеримые виды Q_{ph} $(h = -l_p, \ldots, 0, \ldots, k_p)$, что $\sum\limits_h mQ_{ph} = 1$ и что

$$(h-1)\,2^{-p-1} < f(x) < (h+1)\,2^{-p-1} \text{ на } Q_{ph}\ (h \neq 0),$$
$$-2^{-p-1} < f(x) < 2^{-p-1} \text{ на } Q_{p0} \cap Q.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ измерима посредством $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$. Положим $M_n = E - A_n$ и $N_{nh} = M_n \cap V_{nh}$. Упорядочим N_{nh} $(n \geqslant p)$ следующим образом: N_{nh} предшествует N_{mi}, если либо $n < m$, либо $n = m$, $h < i$. Пусть R_{nh} — вид тех точек из N_{nh}, которые не принадлежат ни к одному из областных дополнений, предшествующих N_{nh} при данном упорядочении. Разделим теперь следующим образом последовательность R_{nh} на частичные последовательности, начинающиеся с $R_{p,-l_p}, \ldots R_{p,k_p}$ соответственно. R_{ni} принадлежит частичной последовательности, начинающейся с R_{ph}, если h — наименьшее число, такое, что

$$(1) \qquad (h-1)2^{-p-1} \leqslant (i-1)2^{-n-1} < (i+1)2^{-n-1} \leqslant (h+1)2^{-p-1}.$$

Пусть Q_{ph} — объединение видов последовательности, начинающейся с R_{ph}. Виды $Q_{p,-l_p}, \ldots, Q_{p,k_p}$ обладают требуемыми свойствами [69]).

Замечание. Брауэр [Брауэр, 1923, стр. 9] доказывает, что в качестве Q_{ph} можно выбрать внешние предельные виды. Я не ввожу этого понятия.

6.4. Интеграл как мера точечного вида

В последующем изложении будут встречаться как плоские, так и трехмерные точечные виды. Чтобы избежать путаницы, трехмерные виды будут обозначаться готическими буквами [70]).

Теорема 1. Пусть $f(x)$ ограниченная функция, определенная на подвиде S вида E. Пусть $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — виды точек в пространстве с такими координатами (p_1, p_2, p_3), что $(p_1, p_2) \in S$ и $0 \not> p_3 \not> f(p_1, p_2)$ для $\mathfrak{T}_1$ и $(p_1, p_2) \in S$ и $0 \not< p_3 \not< f(p_1, p_2)$ для $\mathfrak{T}_2$. Тогда (a) $f(x)$ измерима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{T}_1$, и $\mathfrak{T}_2$—измеримые трехмерные точечные виды; (b) если $f(x)$ измерима, то $\int f(x)\,dx = m\mathfrak{T}_1 - m\mathfrak{T}_2$.

Доказательство (а). Тогда. Пусть $\mathfrak{T}_1$ измерим посредством $\{\mathfrak{V}_{1n}\}$ и $\{\mathfrak{A}_{1n}\}$. Пусть обозначения выбраны таким образом, чтобы имело место неравенство $m\mathfrak{A}_{1n} < 2^{-2n}$. Пусть $\mathfrak{A}_{1n}$ определяется последовательностью элементарных доменов $\{\mathfrak{U}_{1n,\,s}\}$. Выберем i_q, такое, что $m\mathfrak{U}_{1n,\,i_q} > (1-2^{-2q-5})m\mathfrak{A}_{1n}$. Полагая тогда $\mathfrak{W}_{1n,\,q} = \mathfrak{U}_{1n,\,i_{q+1}} - \mathfrak{U}_{1n,\,i_q}$, будем иметь

$$m\mathfrak{W}_{1n,\,q} < 2^{-2q-5}\, m\mathfrak{A}_{1n} < 2^{-2n-2q-5}.$$

Прямая, проведенная через точку $x = (p_1, p_2, 0)$ параллельно оси z, пересекает $\mathfrak{W}_{1n,\,q}$ по отрезку или отрезкам общей длины $l(x)$; пусть $X_{1n,\,q}$ — вид таких точек x, что $l(x) \geqslant 2^{-n-q-3}$. Имеем $mX_{1n,\,q} < 2^{-n-q-2}$. Вид $X_{1n,\,q}$ можно включить в область $C_{1n,\,q}$ с мерой, меньшей чем 2^{-n-q-2}. Положим $B_{1n} = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} C_{1n,\,q}$. Тогда $mB_{1n} < 2^{-n-1}$, и если $x \in E - B_{1n}$, то пересечение прямой, проведенной через x параллельно оси Z, с $\mathfrak{A}_{1n}$ является видом D, таким, что $mD < \sum\limits_{q=1}^{\infty} 2^{-n-q-3} = 2^{-n-3}$ [71]). Положим $E - B_{1n} = M_{1n}$.

Разделим теперь E на конечное множество элементарных доменов Y_{nh}, таких, что если $x \in Y_{nh}$, то восстановленный в x перпендикуляр пересекает $\mathfrak{V}_{1n}$ по отрезку $(0, s)$, удовлетворяющему условию

$$(1) \qquad (2h-1)\, 2^{-n-2} \not> s \not> (2h+1)\, 2^{-n-2} \text{ [72])}.$$

Принимая во внимание, во-первых, это условие, во-вторых, то, что при $x \in M_{1n}$ пересечение прямой, проведенной через x параллельно оси Z, с $\mathfrak{A}_{1n}$ является видом с мерой, меньшей чем 2^{-n-3}, и, в-третьих, то, что $\mathfrak{V}_{1n} \cap (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_{1n}) = \mathfrak{T}_1 \cap (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_{1n})$, мы видим, что при $x \in Y_{nh} \cap M_{1n}$ имеют место неравенства

$$(h-1)\, 2^{-n-1} \not> f(x) \not> (h+1)\, 2^{-n-1}.$$

Для $h = 0$ эти неравенства имеют место во всех точках, где $f(x)$ определено и где $f(x) \not< 0$.

Мы доказали, таким образом, что $f^+(x)$ измерима посредством $\{Y_{nh}\}$ и $\{B_{1n}\}$. Точно так же, исходя из $\mathfrak{T}_2$, можно доказать, что измерима $f^-(x)$.

Поэтому в силу теор. 1 из 6.2.3 $f(x)$ измерима.

Доказательство (a). Только тогда. Пусть $f(x)$ измерима посредством $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$ и пусть $\mathfrak{W}_n$ — n-я аппроксимирующая полоса, $\mathfrak{B}_n$—трехмерная область точек (p_1, p_2, p_3), таких, что $(p_1, p_2) \in A_n$ и $\mathfrak{C}_n$ — вид таких точек в пространстве, что $-2^{-n} < p_3 < 2^{-n}$. Тогда вид $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{W}_n \cup \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_n$ измерим и $m\mathfrak{D}_n < 2^{-n+2}$. Вид $\mathfrak{D}_n$ легко можно включить в область $\mathfrak{F}_n$, такую, что $m\mathfrak{F}_n < 2^{-n+3}$. Рассмотрим конечное множество параллелепипедов $\mathfrak{U}_{1n}$, состоящее из таких точек (p_1, p_2, p_3), что при некотором h имеем

$$(p_1, p_2) \in V_{nh}\ (h > 0) \text{ и } 0 \not> p_3 \not> h\,2^{-n-1}.$$

Рассмотрим также множество $\mathfrak{U}_{2n}$, состоящее из таких точек (p_1, p_2, p_3), что при некотором h имеем

$$(p_1, p_2) \in V_{nh}\ (h < 0) \text{ и } 0 \not< p_3 \not< h\,2^{-n-1}.$$

Вид $\mathfrak{T}_1$ измерим посредством $\{\mathfrak{U}_{1n}\}$ и $\{\mathfrak{F}_n\}$. Вид $\mathfrak{T}_2$ измерим посредством $\{\mathfrak{U}_{2n}\}$ и $\{\mathfrak{F}_n\}$ [73]).

Доказательство (b). Оно сразу получается посредством предельного перехода в равенстве

$$m\mathfrak{U}_{1n} - m\mathfrak{U}_{2n} = 2^{-n-1} \sum_h hmV_{nh}$$ [74]).

В качестве приложения докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ — ограниченные измеримые функции, то $\max(f(x), g(x))$ и $\min(f(x), g(x))$ измеримы.

Доказательство. Положим $\max(f(x), g(x)) = h(x)$, $\min(f(x), g(x)) = k(x)$. Пусть $\mathfrak{T}_i(F)$ ($i = 1, 2$; $F = f, g, h, k$) определяются так, как $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ в теор. 1.

$$\mathfrak{T}_1(h) = \mathfrak{T}_1(f) \cup \mathfrak{T}_1(g),\quad \mathfrak{T}_2(h) = \mathfrak{T}_2(f) \cap \mathfrak{T}_2(g),$$
$$\mathfrak{T}_1(k) = \mathfrak{T}_1(f) \cap \mathfrak{T}_1(g),\quad \mathfrak{T}_2(k) = \mathfrak{T}_2(f) \cup \mathfrak{T}_2(g).$$

$\mathfrak{T}_i(f)$ и $\mathfrak{T}_i(g)$ измеримы. По теор. 1 из 6.3.3 отсюда следует, что $\mathfrak{T}_i(h)$ и $\mathfrak{T}_i(k)$ измеримы. Значит, $h(x)$ и $k(x)$ измеримы.

Замечание. Эту теорему можно доказать также методом пополнения (см. 6.2.2).

6.5. Неограниченные функции

6.5.1. *Неограниченные измеримые функции*

Определение 1. Неотрицательная функция $f(x)$, определенная на некотором подвиде вида E, *измерима*, если при всяком натуральном k измерима «усеченная функция» ${}_kf(x) = \min(f(x), 2^k)$. Неположительная функция $g(x)$ *измерима*, если измерима $-g(x)$. Функция $f(x)$ *измерима*, если измеримы $f^+(x)$ и $f^-(x)$.

Теорема 1. Функция, определенная почти всюду на E, измерима. Это является непосредственным следствием теор. 1 из 6.2.2.

Теорема 2. Сумма двух неотрицательных измеримых функций с одним и тем же доменом измерима.

Доказательство. $\min(f(x)+g(x), 2^k)=\min({}_kf(x) + {}_kg(x), 2^k)$, а последняя функция измерима по теор. 2 из 6.4 и теор. 1 из 6.2.3.

Теорема 3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — неотрицательные измеримые функции, то $h(x) = \max(f(x), g(x))$ и $h'(x) = \min(f(x), g(x))$ измеримы.

Доказательство.

$$\begin{aligned} {}_kh(x) &= \min(\max(f(x), g(x)), 2^k) \\ &= \max({}_kf(x), {}_kg(x)), \\ {}_kh'(x) &= \min(\min(f(x), g(x)), 2^k) \\ &= \min({}_kf(x), {}_kg(x)). \end{aligned}$$

Функции в правых частях измеримы по теор. 2 из 6.4.

Замечание. Не доказано, что сумма двух измеримых функций с одним и тем же доменом измерима. Вряд ли это доказуемо. Более того, вряд ли доказуемо даже следующее более слабое предложение.

Если $f(x)$ и $g(x)$ — измеримые функции, такие, что $0 \not> g(x) \not> f(x)$, то $f(x) - g(x)$ измерима. Источник трудности в том, что разность $f(x) - g(x)$ может быть малой при больших $f(x)$ и $g(x)$.

То же самое замечание применимо к брауэровскому определению неограниченных измеримых функций

[Брауэр, 1923, стр. 18]. Однако соответствующая теорема имеет место для суммируемых функций (теор. 2 из 6.5.2, ниже).

Теорема 4. Если $f(x)$ измерима, то $|f(x)|$ измерима.

Доказательство. По определению $f^+(x)$ и $f^-(x)$ измеримы; отсюда по теор. 2 получаем требуемый результат.

Теорема 5. Если при любом n функция $f_n(x)$ измерима и почти всюду $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то функция $f(x)$ измерима.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^+(x) = f^+(x)$; $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^-(x) = f^-(x)$. Если $f(x)$ неотрицательна, то $\lim\limits_{n\to\infty} {}_kf_n(x) = {}_kf(x)$, так что ${}_kf(x)$ измерима при любом k [75]).

6.5.2. *Суммируемые функции*

Определение. Измеримая функция $f(x)$ *суммируема*, если существует

$$\lim_{k\to\infty}\int {}_kf^+(x)\,dx + \lim_{l\to\infty}\int {}_lf^-(x)\,dx \quad {}^{76)};$$

эта сумма есть $\int f(x)\,dx$.

Теорема 1. Если $f(x)$ суммируема, $g(x)$ — измерима и почти всюду $0 \not> g(x) \not> f(x)$, то $g(x)$ суммируема.

Доказательство. Пусть $g(x) \not> f(x)$ имеет место на почти полном точечном виде Q. Неравенство

$$(1) \qquad \begin{gathered}\min(g(x), 2^{k+m}) - \min(g(x), 2^k) \not> \\ \min(f(x), 2^{k+m}) - \min(f(x), 2^k)\end{gathered}$$

очевидно, для таких точек x из Q, в которых

$$(2) \qquad g(x) \not< 2^k \quad \text{или} \quad g(x) < 2^k.$$

Поэтому, если бы для какого-нибудь x из Q не выполнялось (1), то x не могло бы удовлетворять (2), что является противоречием.

Следовательно, неравенство (1) не может быть ложным, а поэтому оно истинно.

Из (1) получаем, что

$$\int {}_{k+m}g(x)\,dx - \int {}_kg(x)\,dx \not> \int {}_{k+m}f(x)\,dx - \int {}_kf(x)\,dx.$$

Следовательно, существует $\lim\limits_{k\to\infty} \int {}_kg(x)\,dx.$

Теорема 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ — суммируемые почти всюду определенные функции, то $f(x)+g(x)$ суммируема и

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx.$$

Для доказательства потребуются следующие три леммы.

Лемма 1. Теор. 2 имеет место для неотрицательных функций $f(x)$ и $g(x)$.

Доказательство. Положим $f(x)+g(x)=h(x)$. Тогда $h(x)$ измерима по теор. 2 из 6.5.1

$${}_{k-1}f(x) + {}_{k-1}g(x) \not> {}_kh(x) \not> {}_kf(x) + {}_kg(x).$$

Переходя к пределу, видим, что $\int h(x)\,dx$ существует и равен $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Лемма 2. Если $f(x)$ и $g(x)$ — почти всюду определенные суммируемые функции и $0 \not> g(x) \not> f(x)$, то $f(x)-g(x)$ суммируема.

Доказательство. Положим $\int f(x)\,dx = s$. Возьмем любое натуральное n и найдем такое k, что $(s+1)\cdot 2^{-k} < 2^{-n-2}$.

Пусть ${}_kf(x)$ измерима посредством $\{V_{ph}\}$ и $\{A_p\}$, а ${}_kg(x)$ — посредством $\{W_{ph}\}$ и $\{B_p\}$. Так как $\int {}_kf(x)\,dx \not> s$, то

$$2^{-p-1}\sum_h hm\,V_{ph} < s+1$$

для всех p, за исключением, может быть, нескольких малых значений, которыми можно пренебречь. Можно

также предположить, что $p > n + 1$. Если $l = 2^{p+k+1}$, то

$$2^k \, mV_{pl} < s + 1,$$
$$mV_{pl} < (s + 1) \; 2^{-k} < 2^{-n-2}.$$

Включим V_{pl} в область C_p с мерой, меньшей чем 2^{-n-1}. Тогда на $E - (A_p \cup C_p)$ имеем $f(x) \not> 2^k$ [77]).

Положим $A_p \cup B_p \cup C_p = D_n$. Тогда $mD_n < 2^{-n}$, и на $E - D_n$ имеем

$$v(x) = f(x) - g(x) = {}_kf(x) - {}_kg(x) = {}_kv(x).$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на Q. В последующих строчках $\cap\, Q$ нужно добавлять для $h = 0$ или $h' = 0$. На $V_{ph} \cap (E - Ap)$ $[\cap\, Q]$ имеем

$$(h - 1) \; 2^{-p-1} < {}_kf(x) < (h + 1) \; 2^{-p-1}.$$

На $W_{ph'} \cap (E - B_p)$ $[\cap\, Q]$ имеем

$$(h' - 1) \; 2^{-p-1} < {}_kg(x) < (h' + 1) \; 2^{-p-1}.$$

На $V_{ph} \cap W_{p,\,h'} \cap (E - D_n)$ $[\cap\, Q]$ имеем

$$(h - h' - 2) \; 2^{-p-1} < {}_kv(x) < (h - h' + 2) \; 2^{-p-1}.$$

Следовательно, можно найти такое q, что на последнем виде

$$(q - 1) \; 2^{-n-1} < {}_kv(x) < (q + 1) \; 2^{-n-1}$$ [78]).

Если $\overset{*}{\bigcup} (V_{ph} \cap W_{ph'}) = X_{nq}$, где объединение берется по таким парам h, h', которым соответствует одно и то же значение q, то $v_k(x)$ измерима посредством $\{X_{nq}\}$ и $\{D_n\}$ [79]). $v(x)$ поэтому измерима, а значит, и суммируема согласно теор. 1.

Лемма 3. Если $f(x)$ и $g(x)$ почти всюду определенные неотрицательные суммируемые функции, то $f(x) - g(x)$ суммируема.

Доказательство. Если $f(x) - g(x) = h(x)$, то

$$h^+(x) = \max(f(x),\; g(x)) - g(x),$$
$$-h^-(x) = g(x) - \min(f(x),\; g(x)).$$

Так как $0 \not> g(x) \not> \max(f(x),\ g(x)) \not> f(x) + g(x)$ и

$$0 \not> \min(f(x),\ g(x)) \not> g(x),$$

то по теор. 3 из 6.5.1, теор. 1 из 6.5.2, лемме 1 и лемме 2 мы видим, что $h(x)$ суммируема.

Доказательство теоремы 2.

$$f(x) + g(x) = (f^+(x) + g^+(x)) - (-f^-(x) - g^-(x))$$

суммируема согласно леммам 1 и 3.

Теорема 3. Если $f(x)$ измерима, $g(x)$ — суммируема и $|f(x)| < g(x)$ почти всюду, то $f(x)$ суммируема.

Доказательство. $0 \not> f^+(x) \not> |f(x)|$ и $0 \not> -f^-(x) \not> |f(x)|$. Следовательно,

$$0 \not> f^+(x) < g(x) \text{ и } 0 \not> -f^-(x) < g(x).$$

В силу теор. 1 $f^+(x)$ и $-f^-(x)$ суммируемы. Так как $f(x) = f^+(x) - (-f^-(x))$, то по лемме 3 получаем искомый результат.

Теорема 4. Если при всяком n функция $f_n(x)$ суммируема и равномерно $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то $f(x)$ суммируема и $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx$.

Доказательство. Для достаточно больших n имеем $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, значит, по теор. 3 $f(x) - f_n(x)$ суммируема. В силу теор. 2 суммируема и $f(x)$. Второе утверждение теоремы получается непосредственно.

Теорема 5. Если $f(x)$ суммируема и $g(x)$ ограничена и измерима, то функция $h(x) = f(x)\,g(x)$ суммируема.

Доказательство. Предположим, что $|g(x)| < s$. При всяком k функция ${}_kf(x)\,g(x)$ измерима (теор. 2 из 6.2.3), значит, измерима $h(x)$ (теор. 5 из 6.5.1).

Предположим сначала, что $f(x) \not< 0$ и $g(x) \not< 0$. Если $f(x)$ суммируема, то $sf(x)$ также суммируема, так что нам достаточно рассмотреть случай, когда $g(x) < 1$. А тогда легко видеть, что при $l > k$ имеем

$$\min(fg, 2^l) - \min(fg, 2^k) \not> \min(f, 2^l) - \min(f, 2^k).$$

Отсюда

$$\int {}_l h(x)\,dx - \int {}_k h(x)\,dx \not> \int {}_l f(x)\,dx - \int {}_k f(x)\,dx.$$

Это доказывает, что $h(x)$ суммируема.

В общем случае имеем

$$h^+(x) = f^+(x)\, g^+(x) + f^-(x)\, g^-(x),$$

$$h^-(x) = f^+(x)\, g^-(x) + f^-(x)\, g^+(x),$$

так что $h^+(x)$ и $h^-(x)$ суммируемы.

6.5.3. *Функции, суммируемые на точечном виде*

Определение 1. Функция $f(x)$ *измерима на виде* G, если измерима функция $f(x) f_G(x)$. Функция $f(x)$ *суммируема на* G, если суммируема функция $f(x) f_G(x)$. В этом случае

$$\int_G f(x)\,dx = \int_E f(x)\, f_G(x)\,dx.$$

Теорема 1. Измеримая функция измерима на всяком измеримом виде G. Суммируемая функция суммируема на всяком измеримом виде G.

Доказательство. (i) Если $f(x)$ ограничена, то $f(x)\, f_G(x)$ измерима по теор. 2 из 6.2.3.

(ii) Если $f(x)$ неограничена, то ${}_k f(x)\, f_G(x)$ измерима в силу (i) для любого k [80]).

(iii) По предыдущей теореме $f(x)\, f_G(x)$ суммируема, если $f(x)$ суммируема

Определение 2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx$, где G является интервалом (a, b).

Теорема 2. Если $f(x)$ суммируема, то равномерно

$$\lim_{mG \to 0} \left| \int_G f(x)\,dx \right| = 0.$$

Доказательство. (i) Если $f(x)$ ограничена, то

$$\left|\int_G f(x)\,dx\right| \not> (\max|f(x)|)\, mG.$$

(ii) В общем случае найдем такое k, чтобы имели место неравенства

$$\int_E (f^+(x) - {}_kf^+(x))\,dx < 2^{-n-2}$$

и

$$\int_E (f^-(x) - {}_kf^-(x))\,dx < 2^{-n-2}.$$

При $mG < 2^{-n-k-2}$ имеем

$$\left|\int_G f(x)\,dx\right| \not> \int_G {}_kf^+(x)\,dx + \int_G {}_kf^-(x)\,dx +$$

$$\int_G (f^+(x) - {}_kf^+(x))\,dx + \int_G (f^-(x) - {}_kf^-(x)\,dx \not>$$

$$2^k mG + 2^k mG + 2^{-n-2} + 2^{-n-2} < 2^{-n}$$ [81]).

Замечание. Ван Роотселар дал другое определение $\int_G f(x)\,dx$ [ван Роотселар, 1954, стр. 62], которое, быть может, общée данного здесь.

6.5.4. *Предельные теоремы*

Теорема 1. Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) всякая f_n суммируема,

(ii) $f_{n+1}(x) \not< f_n(x)$ при любом n,

(iii) почти всюду существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, (iv) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx$, то $f(x)$ суммируема и

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx.$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int {}_k f_n(x)\,dx.$$

Так как $\int {}_k f_n(x)\,dx$ не убывает при росте n и k, то можно изменить порядок предельных переходов. В правой части получаем

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int {}_k f_n(x)\,dx.$$

Последовательность $\{{}_k f_n(x)\}$ удовлетворяет условиям теор. 1 из 6.2.4, так что

$$\lim_{n\to\infty}\int {}_k f_n(x)\,dx = \int {}_k f(x)\,dx.$$

Это доказывает теорему [82]).

Класс. А справедлива ли интуиционистски упомянутая теорема об изменении порядка предельных переходов?

Инт. Да, и я предлагаю доказать ее в качестве упражнения.

Теорема 2. (Теорема Егорова [Роотселар, 1954, стр. 10].)

Если функции последовательности $\{f_n\}$ определены на измеримом виде Q и почти всюду на Q существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то при любом m можно найти такой измеримый подвид Q_m вида Q, что $mQ - mQ_m < 2^{-m}$ и что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ равномерно на Q_m.

Доказательство. Пусть Q_0— вид с мерой $mQ_0 = mQ$, на котором $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. В качестве Q_m мы возьмем измеримое локализованное о́бластное дополнение с мерой, большей чем $mQ - 2^{-m}$, содержащееся в Q_0 (теор. 2 из 6.3.2). Q_m совпадает с точечным веером S (теор. 1 из 5.2.1). Каждому элементу x из S сопоставлено

натуральное число $N(x)$, такое, что $|f_n(x) - f(x)| < 2^{-p}$ при $n > N(x)$.

Теорема о веерах говорит нам, что можно найти такое натуральное число B, что $N(x)$ зависит только от первых B компонент БПП x. Отсюда следует, что можно вычислить N_0 — максимум значений $N(x)$. Тогда

$$|f_n(x) - f(x)| < 2^{-p} \text{ при любом } n > N_0$$

и любом x из Q_m.

6.6. Гильбертово пространство

Я покажу, что почти всюду определенные функции $f(x)$ с суммируемым квадратом образуют гильбертово пространство B^2.

Вещественное гильбертово пространство можно определять различными способами.

Здесь будут упомянуты два следующих определения:

(i) конструктивное определение гильбертова пространства как вида (позитивно) сходящихся последовательностей действительных чисел, на котором обычным образом определяется скалярное произведение.

(ii) аксиоматическое определение гильбертова пространства посредством аксиом фон Неймана [фон Нейман, 1929, стр. 64—66], [Стоун, 1932, стр. 3].

Можно показать, что оба определения будут интуиционистски эквивалентны, если мы следующим образом слегка изменим систему аксиом.

Для краткости элементы гильбертова пространства H будут называться *векторами*.

Аксиомы Гильбертова пространства.

Аксиомы I группы. Обычные аксиомы для вещественного линейного пространства.

Аксиомы II группы. Обычные аксиомы для скалярного произведения, включая

II a. $(x, x) \nless 0$;

II b. Если $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

(Нулевой элемент пространства H обозначается через 0.)

Отношение отделенности вводится следующим определением.

Определение 1. *x отделено от* 0 ($x \# 0$), если $(x, x) \# 0$. *x отделено от y* ($x \# y$), если $x - y \# 0$.

Определение 2. Векторы $x^1, \ldots, x^k$ называются *взаимно свободными*, если для каждого набора вещественных чисел $a_1, \ldots, a_k$, такого, что $a_i \# 0$ по меньшей мере при одном i имеем

$$a_1 x^1 + \ldots + a_k x^k \# 0.$$

Аксиома III. Для каждого k можно найти k взаимно свободных векторов.

Аксиома IV (сильная форма аксиомы сепарабельности).

Существует такая последовательность векторов $S = \{e^n\}$, что каждая конечная подпоследовательность S свободна и что вид конечных линейных комбинаций векторов из S плотен в H.

Аксиома V — аксиома полноты в обычной форме.

Замечание. Аксиома III является следствием аксиомы IV.

Для формулировки объявленной теоремы потребуется следующее определение.

Определение 3. $f(x) \approx 0$ означает, что почти всюду $f(x) = 0$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны* ($f(x) \approx g(x)$), если $f(x) - g(x) \approx 0$.

Вид функций, эквивалентных данной функции, будет называться *метафункцией*.

В этом разделе $f(x)$ означает иногда функцию, иногда метафункцию, в которую входит $f(x)$.

Теорема 1. Вид B^2 метафункций $f(x)$ с суммируемым квадратом, определенных почти всюду, становится гильбертовым пространством, если положить

$$(f(x),\ g(x)\ ) = \int f(x) g(x) dx.$$

Доказательство. Из аксиом I, II нуждается в доказательстве только IIb.

Нужно доказать, что $(f,\ f) = 0$ влечет $f \approx 0$.

Пусть $h\ (x) = f^2(x)$, тогда ${}_k h\ (x)$ измерима и $\int {}_k h\ (x)\, dx = 0$.

Пусть ${}_k h(x)$ измерима посредством $\{V_{nh}\}$ и $\{A_n\}$. Предположим, что $m(\bigcup_{h>1} V_{nh}) > 2^{-n}$. Положим $M_n = \bigcup_{h>1} V_{nh} - A_n$, тогда $mM_n > 0$. Определим функцию gx, полагая $g(x) = {}_k h(x)$ на M_n и $g(x) = 0$ на $E - M_n$ [83]. Имеем

$$\int g(x)\,dx \not> \int f^2(x)\,dx = 0,$$

$$\int g(x)\,dx > 2^{-n-1}\,mM_n > 0.$$

Мы привели, таким образом, к противоречию предположение о том, что $m(\bigcup_{h>1} V_{nh}) > 2^{-n}$. Значит,

$$m(\bigcup_{h>1} V_{nh}) \not> 2^{-n}.$$

Включим $\bigcup_{h>1} V_{nh}$ в область B_n с мерой, меньшей чем 2^{-n+1}; положим $C_n = A_n \bigcup B_n$. $mC_n < 2^{-n+2}$. На $E - C_n$ имеем $f^2(x) < 2^{-n}$. Положим $D_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$. Имеем $mD_n < 2^{-n+3}$. Пусть $N_n = E - D_n$. На N_n при всяком p имеем $f^2(x) < 2^{-n-p}$, т. е. $f(x) = 0$. $\bigcup_{k=n}^{\infty} N_k$ является видом меры 1, на котором $f(x) = 0$.

Аксиомы III и IV выполняются. Доказательство этого факта совпадает с соответствующим классическим доказательством.

Доказательство аксиомы V (теорема Рисса — Фишера).

Я сформулирую ее как следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из B^2, такая, что $\int (f_m - f_n)^2\,dx$ стремится к 0 при стремлении m и n к бесконечности; тогда в B^2 имеется функция f, такая, что $\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)^2\,dx = 0$ [Гейтинг, 1951].

Данное доказательство следует доказательству фон Неймана.

Прежде всего определим такое натуральное N_p, чтобы при $m, n \geqslant N_p$ имело место неравенство

$$\int (f_m - f_n)^2\, dx < 2^{-3p}\ ^{84}).$$

Для краткости положим $g_p = |f_{N_{p+1}} - f_{N_p}|$ и $h_p(x) = \min(g_p(x), 1)$. Методом теор. 5 из 6.3.3 определим непересекающиеся измеримые виды Q_{ph} ($h = 0, \ldots, s$), такие, что $\sum\limits_h mQ_{ph} = 1$ и что имеем

$$(h-1)2^{-p-1} < h_p(x) < (h+1)2^{-p-1} \text{ на } Q_{ph}\ (h \neq 0),$$
$$-2^{-p-1} < h_p(x) < 2^{-p-1} \text{ на } Q_{p0} \cap Q.$$

Полагаем $Q_{p0} \cup Q_{p1} = R_p$, $\bigcup\limits_{h>1} Q_{ph} = S_p$. Имеем:

$$2^{-3p} > \int h_p^2\, dx = \int\limits_{R_p} h_p^2\, dx + \int\limits_{S_p} h_p^2\, dx \not< 2^{-2p-2}\, mS_p,$$
$$mS_p < 2^{-p+2}, \quad mR_p > 1 - 2^{-p+2}.$$

Положим $\bigcap\limits_{p \geqslant q} R_p = T_q$. Тогда $mT_q > 1 - 2^{-q+3}$. Полагая, наконец, $\bigcup\limits_q T_q = T_0$, имеем $mT_0 = 1$.

Последовательность $\{f_{N_p}\}$ сходится на T_0 к функции f, причем на любом T_q сходимость равномерна.

$$\int\limits_{T_q} (f_m - f_{N_p})^2\, dx \not> \int\limits_{E} (f_m - f_{N_p})^2\, dx < \varepsilon \text{ при } m, N_p > N(\varepsilon),$$

$$\text{(A)} \qquad \int\limits_{T_q} (f_m - f)^2\, dx \not> \varepsilon \text{ при } m > N(\varepsilon).$$

Желаемый результат получается предельным переходом при $q \to \infty$. Классически для этого достаточно просто указать, что левые части (A) при $q = 1, 2, \ldots$ образуют ограниченную монотонную последовательность.

Интуиционистски существование предела приходится доказывать прямым вычислением. Сначала докажем для этого следующую лемму.

Лемма. Если

1) каждая функция последовательности $\{f_n(x)\}$ измерима;

2) при каждом n существует $\int f_n^2(x)\,dx$;

3) при $n \to \infty$ функции $f_n(x)$ равномерно стремятся к $f(x)$, то $f^2(x)$ суммируема и

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n^2(x)\,dx = \int f^2(x)\,dx.$$

Доказательство. По теор. 4 из 6.5.2 $f(x)$, а значит, и $|f(x)|$ суммируемы.

Пусть ε произвольно малое положительное число и

$$\eta = \frac{\varepsilon}{6\int(|f(x)|+1)\,dx}.$$

Можно выбрать такое N, что $|f(x) - f_n(x)| < \eta$ при $n > N$. Тогда

$$|f_m^2(x) - f_n^2(x)| \not> 2\eta\,|f_m(x) + f_n(x)| <$$
$$2\eta\,(|f(x)| + \eta) \quad \text{при} \quad m, n > N.$$

Далее имеем

$$\left|\int (f_m^2(x) - f_n^2(x))\,dx\right| < 4\eta\int(|f(x)|+1)\,dx < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n^2(x)\,dx = S$. Выберем фиксированное значение $n > N$, такое, что

(1) $$\left|\int\limits_n^2 f(x)\,dx - S\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так же, как выше, находим

$$|f^2(x) - f_n^2(x)| < 2\eta\,(|f(x)| + \eta).$$

Тем более,

$$|{}_kf^2(x) - {}_kf_n^2(x)| < 2\eta\,(|f(x)| + \eta).$$

Отсюда

(2) $$\left|\int {}_kf^2(x)\,dx - \int {}_kf_n^2(x)\,dx\right| < 2\eta\int(|f(x)|+1)\,dx = \frac{\varepsilon}{3}.$$

По определению 6.5.2 мы можем найти такое K, что

(3) $$\left|\int f_n^2(x)\,dx - \int {}_k f_n^2(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } k > K.$$

Из (1), (2) и (3) получаем, что

$$\left|\int {}_k f^2(x)\,dx - S\right| < \varepsilon \text{ при } k > K.$$

Таким образом, $\int f^2(x)\,dx = S$.

Продолжим теперь доказательство теор. 2. Для сокращения положим $f_{N_p}(x) = F_p(x)$. Из неравенства Шварца следует при $q > p$

$$\sqrt{\int F_p{}^2(x)\,dx} \not> \sqrt{\int F_q{}^2(x)\,dx} + \sqrt{\int (F_p(x) - F_q(x))^2\,dx}.$$

(1) $$\left|\sqrt{\int F_p^2(x)\,dx} - \sqrt{\int F_q^2(x)\,dx}\right| \not> \sqrt{\int (F_p(x) - Fq(x))^2\,dx} < 2^{-p}.$$

Поэтому существует $\lim\limits_{p\to\infty}\sqrt{\int F_p^2(x)\,dx}$ и, значит, существует $\lim\limits_{p\to\infty}\int F_p^2(x)\,dx$. Положим $\lim\limits_{p\to\infty}\int F_p^2(x)\,dx = S$. Неравенство (1) сохраняется, если брать интегралы по произвольному T_k. Далее, при $r > r_0$ имеем: $\int\limits_{T_k} F_r^2(x)\,dx < S + 1$;

$$\sqrt{\int\limits_{T_k} F_p^2(x)\,dx} < \sqrt{S+1} = A;$$

и

$$\left|\int\limits_{T_k} F_p^2(x)\,dx - \int\limits_{T_k} F_q^2(x)\,dx\right| < 2A2^{-p} \text{ при } q > p > r_0.$$

Так как $F_q(x)$ при стремлении q к бесконечности равномерно сходится к $f(x)$ на T_k, то мы можем, согласно лемме, перейти к пределу:

$$(2) \qquad \left| \int\limits_{T_k} F_p^2(x)\,dx - \int\limits_{T_k} f^2(x)\,dx \right| \not> A2^{-p+1} \text{ при } p > r_0.$$

С другой стороны, так как $mT_0 = 1$ и

$$\lim_{p\to\infty} \int F_p^2(x)\,dx = S, \text{ то}$$

$$(3) \qquad \left| \int\limits_{T_0} F_p^2(x)\,dx - S \right| < 2^{-n-2} \text{ при } p > r_1(n).$$

По теор. 3 и теор. 2 из 6.5.3 получаем

$$(4) \qquad \int\limits_{T_0 - T_k} F_p^2(x)\,dx < 2^{-n-2} \quad \text{при } k > r_2(n, p).$$

Если n дано, то мы можем взять такое p, что $p > r_0$

$$p > r_1(n) \text{ и } A2^{-p+1} < 2^{-n-2};$$

тогда, согласно (2), (3) и (4),

$$\left| \int\limits_{T_k} f^2(x)\,dx - S \right| < 2^{-n} \text{ при } k > r_2(n).$$

Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{T_k} f^2(x)\,dx = S$ или, более явно,

$$(5) \qquad \lim_{k\to\infty} \lim_{h\to\infty} \int\limits_{T_k} {}_hf^2(x)\,dx = S.$$

Так как $\int\limits_{T_k} {}_hf^2(x)\,dx$ — монотонная неубывающая функция как от k, так и от h, то можно, используя свойство, уже упомянутое в доказательстве теор. 1 из 6.5.4, переставить порядок предельных переходов:

$$S = \lim_{h\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{T_k} {}_hf^2(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} \int\limits_{T_0} {}_hf^2(x)\,dx = \int\limits_{T_0} f^2(x)\,dx.$$

Поскольку существование последнего интеграла доказано, то существует и

$$\int\limits_{T_0} (f(x) - f_n(x))^2\, dx.$$

По теор. 2 из 6.5.3 этот интеграл равен

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{T_k} (f(x) - f_n(x))^2\, dx.$$

Поэтому в силу формулы (А) имеем

$$\int\limits_{T_0} (f(x) - f_n(x))^2\, dx \not> \varepsilon \quad \text{при } n > N(\varepsilon).$$

Так как $mT_0 = 1$, то теорема доказана.

6.7. *Дифференцирование*

Я не буду здесь развивать теорию дифференцирования. Доказательства основных теорем были приспособлены для интуиционистских целей ван Роотселаром [ван Роотселар, 1954, стр. 33].

VII. ЛОГИКА

7. 1. Исчисление высказываний

Слово «логика» имеет несколько различных значений. Я не буду пытаться дать определение интуиционистской логики, подобно тому как я не начал этот курс с определения математики. Все же полезно сделать некоторые предварительные замечания. Наша логика имеет дело только с математическими предложениями. Мы не будем касаться вопроса, допускает ли она применения за пределами математики. Буквы p, q, r будут использоваться в этой главе как переменные для математических предложений; готические буквы $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ будут использоваться как сокращения для математических предложений. Я не намерен приводить здесь полное формальное изложение интуиционистской логики; формальная система, кодифицирующая все известные к настоящему моменту способы логического вывода в интуиционистской математике, доступно изложена в книге Клини [Клини, 1952], где читатель найдет также обзор математических исследований, касающихся этой системы. Сейчас я только привлеку ваше внимание к некоторым формулам, выражающим интересные способы рассуждения, и покажу, почему эти способы интуитивно ясны в сфере интуиционистской математики.

Сначала нужно настолько твердо, насколько это возможно, фиксировать смысл логических связок; я делаю это, давая необходимые и достаточные условия, при которых составное выражение может быть утверждаемо.

7.1.1. *Истолкование знаков*

Конъюнкция $\wedge$ не представляет трудности. $\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$ можно утверждать тогда и только тогда, когда можно утверждать как $\mathfrak{p}$, так и $\mathfrak{q}$.

Я уже говорил о *дизъюнкции* $\vee$ (2.2.5 в конце); $\mathfrak{p} \vee \mathfrak{q}$ можно утверждать тогда и только тогда, когда можно утверждать хотя бы одно из высказываний $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$.

Отрицание $\neg$ является сильным математическим отрицанием, которое мы уже обсудили (2.2.2). Для большей ясности вспомним, что математическое высказывание $\mathfrak{p}$ всегда требует проведения некоторого математического построения с некоторыми заданными свойствами. $\mathfrak{p}$ можно утверждать, коль скоро это построение выполнено. В этом случае мы говорим, что построение *доказывает* высказывание $\mathfrak{p}$, и называем его *доказательством* $\mathfrak{p}$. Для краткости построение, требуемое высказыванием $\mathfrak{p}$, будем обозначать тоже буквой $\mathfrak{p}$. Тогда $\neg\, \mathfrak{p}$ можно утверждать тогда и только тогда, когда у нас есть построение, приводящее к противоречию предположение о том, что построение $\mathfrak{p}$ выполнено.

Сигн. А разве не нужно разъяснить понятие противоречия?

Инт. Я думаю, что понятие противоречия должно считаться первоначальным понятием. Его очень трудно свести к более простым понятиям, но всегда легко распознать противоречие как таковое. Практически мы всегда можем привести его к форме $1 = 2$. Рассмотрим в качестве простого примера высказывание $\mathfrak{p} \equiv (\sqrt{2}$ рационален). Данное высказывание требует построения таких целых a и b, что $a^2 = 2b^2$. Пользуясь хорошо известными приемами, легко добиться, чтобы a и b были взаимно простыми. С другой стороны, a четно, так что a^2 делится на 4 и $2b^2$ тоже делится на 4. Значит, b четно и 2 является общим делителем как a, так и b. Это противоречит взаимной простоте a и b. Противоречию можно придать следующую форму: наибольший общий делитель a и b есть в одно и то же время 1 и 2.

Некоторые математики, особенно Грисс, выдвинули возражения против использования противоречия в математических рассуждениях. Я рассмотрю эти возражения в следующей главе; здесь я принимаю, что понятие противоречия достаточно ясно и что отрицание, на нем основанное, можно использовать в математике.

Импликацию $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ можно утверждать тогда и только тогда, когда мы располагаем таким построением $\mathfrak{r}$, которое, будучи объединено с любым доказывающим $\mathfrak{p}$ построением (в предположении, что последнее выполнено), автоматически давало бы доказывающее $\mathfrak{q}$ построение. Другими

словами, построение $\mathfrak{p}$ вместе с построением $\mathfrak{r}$ образовывали бы доказательство $\mathfrak{q}$.

Почти каждое доказательство из этой книги состоит в построении какого-нибудь такого $\mathfrak{r}$. Одним из первых примеров (кстати, очень ясным примером) является доказательство теор. 2 из 2.2.3.

Логическую формулу с пропозициональными переменными [85]), скажем $\mathfrak{A}(p, q \ldots)$, можно утверждать тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots)$ можно утверждать при произвольных $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$; т. е. в том случае, если у нас имеется общий метод, позволяющий при произвольных $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ получить построение, требуемое предложением $\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots)$.

Рассмотрим, например,

$$\mathfrak{A}(p, q) \equiv (p \wedge \cdot p \to q \cdot \to q).$$

$\mathfrak{A}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ требует такого построения E, которое из доказательства C для $\mathfrak{p}$ и доказательства D для $\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}$ извлекало бы доказательство для $\mathfrak{q}$. По определению импликации E состоит просто в соединении C и D. Поэтому $\mathfrak{A}(p, q)$ можно утверждать.

В 2.2.2 я привел критерий для математических предложений. А именно: каждое математическое предложение имеет форму: «Я выполнил построение со следующими свойствами...» Все четыре логические связки сохраняют эту форму предложения. Удобно при этом понимать слово «построение» в широком смысле, а именно так, чтобы оно могло обозначать и общий метод построения. Так оно и понималось в предыдущем абзаце. Если мы поступим таким образом, а мы так и сделаем, то всякая логическая формула будет выражать математическое предложение.

7.1.2. *Теоремы исчисления предложений*

В формулах точки и скобки используются обычным образом. Предполагается, что $\to$ связывает слабее, чем $\wedge$ и $\vee$. Утверждаемые формулы отмечаются знаком $\vdash$.

Хотя основные различия между классической и интуиционистской логикой касаются свойств отрицания, эти логики не совсем совпадают и в формулах без отрицания. $p \to q \cdot \vee \cdot q \to p$ является истинной формулой в классической логике, но не может быть утверждаемо в интуиционистской логике. Это ясно из определений.

В теории отрицания не проходит принцип исключенного третьего. $p \vee \neg p$ требует общего метода для решения любой проблемы или — более явно — общего метода, который по произвольному высказыванию $\mathfrak{p}$ позволял бы получить либо доказательство $\mathfrak{p}$, либо доказательство $\neg \mathfrak{p}$. Так как мы не располагаем таким методом, то мы не в праве утверждать этот принцип.

Другой формой принципа является $\neg\neg p \to p$. Мы встретили много примеров высказываний, для которых это не проходит. Первым из них было «ρ рационально» из 2.2.2. Однако

(1) $$\vdash p \to \neg\neg p.$$

Ясно, что из ($\mathfrak{p}$) следует невозможность того, что $\mathfrak{p}$ невозможно. Я предоставляю вам дать полное описание общего метода построения, который требуется для формулы (1) сообразно с определениями $\to$ и $\neg$.

Другой важной формулой является формула

(2) $$\vdash p \to q \cdot \to \cdot \neg q \to \neg p.$$

Конечно, нельзя считать истинной обратную формулу $\cdot \neg q \to \neg p \cdot \to \cdot p \to q$ (в качестве противоречащего примера можно взять $\mathfrak{q} \equiv a \# b$, $\mathfrak{p} \equiv a \neq b$, где a и b—действительные числа) [86]).

Применяя (2) дважды, находим

(3) $$\vdash p \to q \cdot \to \cdot \neg\neg p \to \neg\neg q.$$

Подстановкой в (1) получаем

(4) $$\vdash \neg p \to \neg\neg\neg p.$$

Подставляя $\neg\neg p$ вместо q в (2) и используя (1), получим

(5) $$\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p.$$

Из (4) и (5) следует, что нет надобности рассматривать более двух последовательных отрицаний.

Из $\vdash p \to p \vee q$ с помощью (2) следует, что $\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p$. Точно так же получаем $\vdash \neg(p \vee q) \to \neg q$, так что

(6) $$\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q.$$

Легко видеть, что имеет место и обратная формула

(7) $$\vdash \neg p \wedge \neg q \rightarrow \neg (p \vee q).$$

(6) и (7) образуют одну из эквивалентностей де Моргана. Другая справедлива только наполовину:

(8) $$\vdash \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg (p \wedge q).$$

Следующий пример показывает, что нельзя утверждать $\neg (p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$. Пусть $\mathfrak{p}$ будет предложением $a \neq 0$, а $\mathfrak{q}$ предложением $b \neq 0$, где a и b — действительные числа. Тогда $\neg \mathfrak{p}$ означает $a = 0$, и $\neg \mathfrak{q}$ означает $b = 0$. В 2.2.5 я доказал, что $ab \neq 0$ эквивалентно $\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q}$, так что $ab = 0$ эквивалентно $\neg (\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q})$. Но в этом же параграфе я дал пример действительных чисел a и b, для которых $ab = 0$, но неизвестно, ни что $a = 0$, ни что $b = 0$

(9) $$\vdash \neg \neg (p \vee \neg p).$$

Ибо $\neg (\mathfrak{p} \vee \neg \mathfrak{p})$ влекло бы по (6) $\neg \mathfrak{p} \wedge \neg \neg \mathfrak{p}$, что является противоречием. Из (8) с помощью (2) и (6) получаем:

$$\vdash \neg \neg (p \wedge q) \rightarrow \neg (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg \neg p \wedge \neg \neg q,$$

(10) $$\vdash \neg \neg (p \wedge q) \rightarrow \neg \neg p \wedge \neg \neg q.$$

Имеет место также и обратная формула

(11) $$\vdash \neg \neg p \wedge \neg \neg q \rightarrow \neg \neg (p \wedge q).$$

В самом деле, из приведенного истолкования логических связок ясно, что $\vdash \neg (p \wedge q) \wedge p \rightarrow \neg q$ и что поэтому $\vdash \neg (p \wedge q) \wedge \neg \neg q \rightarrow \neg p$.

Поэтому, если дано $\neg \neg \mathfrak{p} \wedge \neg \neg \mathfrak{q}$, то предположение $\neg (\mathfrak{p} \wedge \mathfrak{q})$ привело бы к $\neg \mathfrak{p}$, что противоречит предположенному $\neg \neg \mathfrak{p}$.

Легко усмотреть, что

(12) $$\vdash \neg \neg p \vee \neg \neg q \rightarrow \neg \neg (p \vee q),$$

но обратная импликация не проходит в силу нашего истолкования связки $\vee$.

7.1.3. *Формальная система*

Интуиционистское исчисление предложений было развито [Гейтинг, 1930] в виде формальной системы с символами $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\urcorner$ в качестве неопределяемых констант на основе следующих аксиом:

I	$\vdash p \rightarrow (p \wedge p)$.
II	$\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$.
III	$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)]$.
IV	$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.
V	$\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$.
VI	$\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$.
VII	$\vdash p \rightarrow (p \vee q)$.
VIII	$\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$.
IX	$\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$.
X	$\vdash \urcorner p \rightarrow (p \rightarrow q)$.
XI	$\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \urcorner q)) \rightarrow \urcorner p$.

Правилами вывода являются обычные правила вывода классического исчисления предложений.

Аксиома X может показаться интуитивно неясной. Фактически она является дополнительным уточнением определения импликации. Вы помните, что $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{q}$ может утверждаться тогда и только тогда, когда у нас есть построение, которое, будучи объединено с построением $\mathfrak{p}$, доказывало бы $\mathfrak{q}$. Предположим теперь, что $\vdash \urcorner \mathfrak{p}$, т. е. что мы получили противоречие, исходя из предположения о выполнимости построения $\mathfrak{p}$. Тогда получение этого противоречия можно рассматривать в некотором смысле как такое построение, которое, будучи присоединено к (несуществующему!) построению $\mathfrak{p}$, дает доказательство $\mathfrak{q}$. Я буду истолковывать импликацию в этом более широком смысле.

Система интуиционистской логики, в которой $\rightarrow$ истолковывается в узком смысле и в котором соответственно отбрасывается аксиома X, была развита Иогансоном в его «минимальном исчислении» [Иогансон, 1936].

Нужно помнить, что нельзя доказать адекватность представления интуиционистской теории в какой-нибудь формальной системе. В истолковании знаков всегда останется некоторая неопределенность и никогда нельзя будет доказать математически строго, что данная система аксиом действительно охватывает собою все пригодные методы доказательства.

7.2. Исчисление предикатов

7.2.1. *Истолкование кванторов*

Пусть $\mathfrak{p}(x)$ — предикат от одной переменной x, причем эта переменная принимает значения из данного математического вида Q. Тогда $\vdash (\forall x)\, \mathfrak{p}(x)$ означает, что $\mathfrak{p}(x)$ верно для любого x из Q; другими словами, у нас есть общий метод построения, который по любому элементу a, выбранному из Q, позволяет нам получить построение $\mathfrak{p}(a)$. В случае, когда Q является потоко-видом, мы должны быть способны выполнять построение $\mathfrak{p}(x)$ для каждой БПП x из Q; в доказательстве теоремы о веерах мы видели, что данное истолкование квантора общности является очень сильным. Квантор существования также будет истолковываться сильными образом. $(\exists x)\, \mathfrak{p}(x)$ будет считаться верным тогда и только тогда, когда фактически построен элемент a из Q, для которого истинно $\mathfrak{p}(a)$.

Введение предикатов с более чем одним аргументом не представляет трудностей. Формула исчисления предикатов первой ступени, содержащая пропозициональные и предикатные переменные, может утверждаться тогда и только тогда, когда она истинна при любой подстановке конкретных предложений и предикатов вместо соответствующих переменных. Простая формализация интуиционистского исчисления предикатов получается присоединением к интуиционистскому исчислению предложений символов, аксиом и правил вывода обычного исчисления предикатов, как это было формулировано Гильбертом и Аккерманном [Гильберт и Аккерманн, 1949, стр. 59]; см. также [Гейтинг, 1946]. Я не буду развивать эту формальную систему. Вместо этого я интуитивными методами докажу несколько формул.

7.2.2. *Теоремы исчисления предикатов*

Следующие теоремы очевидны.

(1) $$\vdash (\forall x)\, p(x) \rightarrow \neg (\exists x) \neg p(x).$$

(2) $$\vdash (\exists x)\, p(x) \rightarrow \neg (\forall x) \neg p(x).$$

Обратные импликации не имеют места. Противоречащие примеры:

(i) Пусть x пробегает действительные числа и пусть $\mathfrak{p}(x)$ означает «x рационально или x иррационально».

(ii). Пусть x пробегает рациональные числа и пусть $\mathfrak{p}(x)$ означает: «x равно действительному числу ρ, определенному в 2.2.2».

(3) $$\vdash (\forall x) \neg p(x) \rightarrow \neg (\exists x)\, p(x).$$

(4) $$\vdash \neg (\exists x)\, p(x) \rightarrow (\forall x) \neg p(x).$$

(5) $$\vdash (\exists x) \neg p(x) \rightarrow \neg (\forall x)\, p(x).$$

Импликация, обратная (5), не имеет места. Противоречащий пример.

Пусть x пробегает рациональные числа и пусть $\mathfrak{p}(x)$ означает: «x не равно действительному числу ρ, определенному в 2.2.2».

Подстановкой в (3) получаем

(6) $$\vdash (\forall x) \neg\neg p(x) \rightarrow \neg (\exists x) \neg p(x).$$

Подстановка в (4) дает

(7) $$\vdash \neg (\exists x) \neg p(x) \rightarrow (\forall x) \neg\neg p(x).$$

Применяя формулы (3) и (5) исчисления предложений из 7.1.2 к формуле (6) данного параграфа, получаем

(8) $$\vdash \neg\neg (\forall x) \neg\neg p(x) \rightarrow \neg (\exists x) \neg p(x).$$

Эта формула может быть ослаблена следующим образом:

(9) $$\vdash \neg\neg (\forall x)\, p(x) \rightarrow \neg (\exists x) \neg p(x).$$

(9) и (7) дают следующий важный результат:

(10) $$\vdash \neg\neg (\forall x)\, p(x) \rightarrow (\forall x) \neg\neg p(x).$$

Одним из наиболее удивительных свойств интуиционистской логики является то, что обратная импликация не имеет места. Это тем более примечательно, что формула исчисле-

ния предложений, получаемая из обратной импликации ограничением области значений x конечным множеством, истинна. В самом деле, если x принимает только два значения, то мы получим формулу (11) из 7.1.2. Брауэр [Брауэр, 1924, стр. 256; Гейтинг, 1930 А, стр. 65; Клини, 1952, стр. 491] дал следующий противоречащий пример.

Пусть поток M определяется законом потока Λ_M и дополнительным законом Γ_M, приведенными ниже.

Λ_M. Первая компонента допустимой последовательности может быть 0 или 1. Если $a_1, \ldots, a_n$ — допустимая последовательность и $a_n = 0$, то a_{n+1} может быть 0 или 1; если $a_n = 1$, то $a_{n+1} = 1$.

Γ_M сопоставляет допустимой последовательности $a_1, \ldots, a_n$ число a_n.

Короче говоря, M состоит из всех БПП, компоненты которых могут быть 0 или 1, причем за 1 всегда следует только 1.

Следующий закон Ξ приписывает номера некоторым элементам из M.

Ξ: последовательность, все компоненты которой суть 0, имеет номер 1. Последовательность, все компоненты которой суть 1, имеет номер 2. Последовательность, состоящая из n нулей, за которыми следуют единицы, имеет номер $n + 2$.

Пусть x пробегает элементы M и пусть $\mathfrak{p}(x)$ есть предложение «Ξ приписывает x некоторый номер». Тогда $(\forall x) \neg\neg \mathfrak{p}(x)$ верно. Я докажу эквивалентное этому предложение $\neg(\exists x) \neg \mathfrak{p}(x)$, приводя к противоречию, что Ξ не приписывает никакого номера некоторому элементу a из M. При этом предположении первая компонента a не может быть 1, так как иначе $\Xi(a)$ равнялось бы 2, так что первая компонента a есть 0. Вторая компонента a не может быть 1, так как тогда $\Xi(a)$ равнялось бы 3, значит, и вторая компонента есть 0. Продолжая таким образом рассуждение, мы видим, что каждая компонента является нулем. Следовательно, $\Xi(a) = 1$, что противоречит исходному предположению.

Однако предложение $\neg\neg(\forall x)\mathfrak{p}(x)$ не имеет места. Можно даже доказать, что $\neg(\forall x)\mathfrak{p}(x)$. В самом деле, предположим, что $(\forall x)\mathfrak{p}(x)$. Тогда по теореме о веерах мы можем заключить, что $\Xi(x)$ должно быть известно после того, как дано конечное число N компонент x, это же противоречит очевидным образом определению Ξ [87]).

Класс. Это первый пример классической теоремы, которая интуиционистски не только не доказуема, но даже ложна.

Инт. Это расхождение, конечно, обусловлено введением БПП. В частности, в применении к БПП квантор общности имеет совсем иной смысл в интуиционистской математике, чем в классической.

Было выдвинуто предположение [Ку́рода, 1951, стр. 461], что формула $(\forall x)\neg\neg p(x) \rightarrow \neg\neg(\forall x)\, p(x)$ всегда истинна, если x пробегает какой-нибудь исчислимо бесконечный вид. Во всех противоречащих примерах, которые были приведены, x пробегает вид, не являющийся исчислимо бесконечным. (Это имеет место и для приведенного M, хотя M и является счетным с классической точки зрения!) Однако в данное время не видно путей доказательства предположения Ку́роды[88].

Из (3) и (4), применяя (2) из 7.1.2, получаем

$$(11)\qquad \vdash \neg\neg(\exists x)\, p(x) \rightarrow \neg(\forall x)\neg p(x),$$

$$(12)\qquad \vdash \neg(\forall x)\neg p(x) \rightarrow \neg\neg(\exists x)\, p(x).$$

Посредством подстановки в (5) получаем

$$(13)\qquad \vdash (\exists x)\neg\neg p(x) \rightarrow \neg(\forall x)\neg p(x).$$

Из (13) и (12) получаем

$$(14)\qquad \vdash (\exists x)\neg\neg p(x) \rightarrow \neg\neg(\exists x)\, p(x).$$

Здесь также не имеет места обратная импликация, но для (14) этот факт менее удивителен, чем для (10), так как соответствующая формула исчисления предложений, а именно $\neg\neg(p \vee q) \rightarrow \neg\neg p \vee \neg\neg q$, также не доказуема.

7.3. Приложения

В некоторых случаях параллельно позитивной теории можно развивать негативную. В позитивной теории каждое понятие вводится при помощи позитивного определения; в соответствующей негативной теории некоторые из них вводятся при помощи негативных определений, включающих двойное отрицание, но таких, что классически определения соответствующих понятий в обеих теориях эквивалентны.

7.3.1. *Отношения порядка на континууме*

Определение 1. Если S—математический вид, а $<$ — предикат, определенный на некотором подвиде вида $S \times S$ и удовлетворяющий приведенным ниже правилам (1) — (4), то $<$ называется *отношением частичного порядка* в виде S и S называется *частично упорядоченным* посредством $<$. В дальнейшем $a > b$ будет обозначать то же, что $b < a$

(1) $$a < b \to \neg(a > b) \wedge \neg(a = b).$$
(2) $$a = b \wedge b < c \to a < c.$$
(3) $$a < b \wedge b = c \to a < c.$$
(4) $$a < b \wedge b < c \to a < c.$$

Определение 2. Отношение частичного порядка $<$ в виде S называется *отношением порядка* в S и S называется *упорядоченным* посредством $<$, если удовлетворяется следующее правило:

(5a) $$a = b \vee a < b \vee a > b.$$

Отношение $<$ между натуральными или рациональными числами является отношением порядка. Отношение $<$ между действительными числами, введенное в 2.2.6 и в 3.3, не является отношением порядка. Это — непосредственное следствие теор. 2 из 3.4.3.

Вместо (5a) отношение $<$ между действительными числами удовлетворяет нижеприведенным условиям (5b) и (6), которые следуют из (1) — (4) и (5a).

(5b) $\neg(a > b) \wedge \neg(a < b) \to a = b$ (ср. теор. 3 из 2.2.6),

(6) $a < b \to (\forall c)(a < c \vee c < b)$ (ср. теор. 4 из 2.2.6).

Определение 3. Отношение частичного порядка $\dot{<}$ в виде S называется *отношением псевдопорядка* и S называется *псевдоупорядоченным* посредством $\dot{<}$, если $\dot{<}$ удовлетворяют условиям (5b) и (6).

В дальнейшем знак $\dot{<}$ всегда означает отношение псевдопорядка в виде S.

Определение 4. $a \dot{<} b$ означает $\neg(a > b) \wedge \neg(a = b)$.

Теорема 1. $\neg(a \dot{<} b)$ эквивалентно $\neg(a < b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (1) имеем $a \dot{<} b \to a < b$, так что $\neg (a \dot{<} b) \to \neg (a < b)$ ((2) из 7.1.2). Чтобы доказать обратное, заметим, что $a \dot{<} b \wedge \neg (a < b)$ означает то же самое, что $\neg (a > b) \wedge \neg (a < b) \wedge \neg (a = b)$, а это противоречит (5b). Поэтому $a \dot{<} b \wedge \neg (a < b)$ невозможно; следовательно, $\neg (a < b) \to \neg (a \dot{<} b)$.

Т е о р е м а 2. $a \dot{<} b$ эквивалентно $\neg\neg (a < b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения (4) и формул (6), (7) из 7.1.2 $a \dot{<} b$ эквивалентно $\neg (a > b \vee a = b)$, так что $\neg\neg (a \dot{<} b) \to a \dot{<} b$ [(5) из 7.1.2)].

В силу теоремы 1

$$\neg (a \dot{<} b) \to \neg (a < b), \text{ так что } \neg\neg (a < b) \to \neg\neg (a \dot{<} b)$$
$$[(2) \text{ из } 7.1.2] \to a \dot{<} b.$$

А так как в силу теор. 1

$$\neg (a < b) \to \neg (a \dot{<} b), \text{ то}$$
$$a \dot{<} b \to \neg\neg (a < b) \qquad ((1),\ (2) \text{ из } 7.1.2).$$

Т е о р е м а 3. Отношение $\dot{<}$ удовлетворяет условиям (1) — (4), (5b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) следует из опр. 4 и теор. 1.

(2) следует из (2) для $<$ в силу (3) из 7.1.2 и теор. 2. В самом деле,

$$a = b \wedge \neg\neg (b < c) \to \neg\neg (a < c) \to a \dot{<} c.$$

(3) рассматривается аналогично (2).

(4) для $\dot{<}$ следует из (4) для $<$ с помощью формул (11) (3) из 7.1.2 и теор. 2.

(5b) следует из теор. 1 и (5b) для $<$.

В случае континуума отношение $<$ не удовлетворяет условию (6) (см. 8.1.1) [89]). Вместо этого удовлетворяется следующее условие:

$$(5c) \qquad \neg (a \dot{<} b) \wedge \neg (a = b) \to a \dot{>} b.$$

Т е о р е м а 4. Если $<$ является отношением псевдопорядка в виде S, то отношение $\dot{<}$, ему соответствующее (опр. 4), удовлетворяет условию (5c).

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно получается из теор. 1 и опр. 4.

Определение 5. Отношение частичного порядка в виде S, удовлетворяющее условиям (1) — (4b), (5c), называется *отношением виртуального порядка* в S и S называется *виртуально упорядоченным посредством него* [Брауэр, 1925 A, стр. 453].

Теоремы 3 и 4 можно теперь выразить следующим образом. Если $<$ есть отношение псевдопорядка в виде S, то $\dot{<}$, определенное с помощью опр. 4, является отношением виртуального порядка в S.

Замечание об обозначениях. Мои обозначения отличны от обозначений Брауэра.

Привожу словарик:

обозначения этой книги: $<\quad \nless \quad \dot{<}$

обозначения Брауэра: $<\!\circ \quad \geqslant \quad <$

Причина изменения обозначений в том, что для анализа наиболее важным является отношение псевдопорядка между действительными числами, а потому его следует обозначать наиболее простым знаком. Кроме того, в обозначениях Брауэра имеется опасность смешения $a \geqslant b$ и $(a > b \vee a = b)$. Последнее отношение я обозначаю посредством $a \geqslant b$.

В соответствии с опр. 5 отношение виртуального порядка удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\qquad a \dot{<} b \rightarrow \neg (a \dot{>} b) \wedge \neg (a = b).$

(2) $\qquad a = b \wedge b \dot{<} c \rightarrow a \dot{<} c.$

(3) $\qquad a \dot{<} b \wedge b = c \rightarrow a \dot{<} c.$

(4) $\qquad a \dot{<} b \wedge b \dot{<} c \rightarrow a \dot{<} c.$

(5b) $\qquad \neg (a \dot{<} b) \wedge \neg (a \dot{>} b) \rightarrow a = b.$

(5c) $\qquad \neg (a \dot{<} b) \wedge \neg (a = b) \rightarrow a \dot{>} b.$

Теорема 5. Если $\dot{<}$ является отношением виртуального порядка в виде S, то

$$\neg\neg (a \dot{<} b) \rightarrow a \dot{<} b \text{ и } \neg\neg (a = b) \rightarrow a = b.$$

Доказательство. Из (1) и (5c) получаем, что $a \dot{<} b$ эквивалентно $\neg (a \dot{>} b) \wedge \neg (a = b)$, а последнее в силу (6), (7) из 7.1.2. эквивалентно $\neg (a \dot{>} b \vee a = b)$. Поэтому в силу (5) из 7.1.2. $\neg\neg (a \dot{<} b) \rightarrow a \dot{<} b$.

Из (1) и формул (2), (1) из 7.1.2 мы выводим, что $a = b \to \neg (a \dot{<} b)$. Аналогично $a = b \to \neg (a \dot{>} b)$. Поэтому, используя (5b) и формулы (6), (7) из 7.1.2, видим, что $a = b$ эквивалентно $\neg (a \dot{<} b \vee a \dot{>} b)$. Это доказывает, что $\neg\neg (a = b) \to a = b$.

Определение 6. Пусть $\overset{\circ}{<}$ является отношением частичного порядка в виде S и пусть Σ вид таких формул $a = b$ или $a \overset{\circ}{<} b$, которые истинны для элементов a, b из S. Отношение $\overset{\circ}{<}$ называется *непродолжимым*, если выполняются следующие условия: для любых $x, y \in S$, таких, что $\neg (x \overset{\circ}{<} y)$ невыводимо из Σ посредством применения (1) — (4), имеет место $x \overset{\circ}{<} y \in \Sigma$; аналогично для любых $x, y \in S$, таких, что $\neg (x = y)$ невыводимо из Σ посредством применения (1) — (4), имеет место $x = y \in \Sigma$.

Теорема 6. Всякое отношение виртуального порядка непродолжимо [Брауэр, 1927].

Доказательство. Если $x \dot{>} y \in \Sigma$, то $\neg (x \dot{<} y)$ можно вывести из Σ посредством применения (1); поэтому если $\neg (x \dot{<} y)$ невыводимо из Σ посредством применения (1) — (4), то $\neg (x \dot{>} y \in \Sigma)$ и аналогично $\neg (x = y \in \Sigma)$.

Поэтому в силу (5c) $x \dot{<} y \in \Sigma$.

Доказательство для $=$ аналогично.

Теорема 7. Всякое непродолжимое отношение частичного порядка есть отношение виртуального порядка [Брауэр, 1927].

7.3.2. *Негативная теория сходимости*

Определение 1 из 2.4 может быть сформулировано следующим образом:

Последовательность $\{a_n\}$ действительных чисел позитивно сходится к пределу a, если

$$(1) \qquad (\forall k)(\exists n)(\forall p)(|a - a_{n+p}| < 2^{-k}).$$

В качестве соответствующего негативного определения выбираем следующее:

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ *негативно сходится к пределу* a ($^{-}\lim a_n = a$), если

$$(2) \qquad (\forall k) \neg\neg (\exists n)(\forall p)(|a - a_{n+p}| < 2^{-k})$$

[Дейкман, 1952].

Критерий сходимости Коши есть

$$(3) \qquad (\forall k)(\exists n)(\forall p)(|a_{n+p} - a_n| < 2^{-k}).$$

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ *не колеблется*, если

$$(4) \qquad (\forall k) \neg\neg (\exists n)(\forall p)(|a_{n+p} - a_n| < 2^{-k}).$$

Хорошо известно, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет (3), то можно найти такое действительное число a, что (1) будет истинно. Как показывает приводимый ниже пример (ii), такого соотношения нет между (4) и (2).

Примеры. (i) $a_n = 1$, если n-й знак десятичного разложения π является девяткой из первого вхождения последовательности 0123456789 в это разложение (такое значение n, если оно существует, будем называть номером последовательности), в противном случае $a_n = 0$. Чтобы доказать, что эта последовательность удовлетворяет условию (2) при $a = 0$, я замечу сначала, что (2) эквивалентно

$$(5) \qquad \neg (\exists k)(\forall n) \neg (\forall p)(|a - a_{n+p}| < 2^{-k}).$$

Предположим, что мы нашли такое k_0, что

$$(\alpha) \qquad (\forall n) \neg (\forall p)(|a_{n+p}| < 2^{-k_0}).$$

Предположим, далее, что последовательность 0123456789 входит в десятичное разложение π и s номер последовательности.

Тогда

$$(\beta) \qquad (\forall p)\ (a_{s+p} = 0),$$

так что

$$(\forall p)(|a_{s+p}| < 2^{-k_0}).$$

Поэтому (α) не может быть истинным. Итак, мы установили следующее.

Если (α) истинно, то 0123456789 не входит в десятичное разложение π. Однако тогда $(\forall n)(a_n = 0)$ и (α) ложно.

Таким образом, (α) ведет к противоречию и (5) доказано. Ясно, однако, что мы не можем утверждать, что последовательность $\{a_n\}$ позитивно сходится.

(ii) $a_n = 0$, если в первых n знаках после запятой десятичного разложения π встречается вхождение 0123456789; $a_n = 1$ в противном случае. Последовательность $\{a_n\}$ не колеблется — доказательство аналогично доказательству в примере (i). Однако нельзя утверждать, что она негативно сходится, так как неизвестно, чему равен предел, если он существует, 0 или 1.

Теорема 1. Всякая негативно сходящаяся последовательность не колеблется.

Доказательство. Введем для краткости следующие обозначения:

$$(\exists n)(\forall p)(|a_{n+p} - a_n| < 2^{-k}) \text{ посредством } \mathfrak{A}(k) \text{ и}$$

$$(\exists n)(\forall p)(|a_{n+p} - a| < 2^{-k}) \text{ посредством } \mathfrak{B}(k, a).$$

Тогда: $\mathfrak{B}(k+1, a) \to \mathfrak{A}(k)$,

$$\neg\neg\,\mathfrak{B}(k+1, a) \to \neg\neg\,\mathfrak{A}(k),$$

$$(\forall k)\neg\neg\,\mathfrak{B}(k, a) \to (\forall k)\neg\neg\,\mathfrak{A}(k),$$

$$(\exists a)(\forall k)\neg\neg\,\mathfrak{B}(k, a) \to (\forall k)\neg\neg\,\mathfrak{A}(k).$$

Это и доказывает теорему.

Теорема 2. Если $^{-}\lim a_n = a$, $^{-}\lim b_n = b$, то $^{-}\lim (a_n + b_n) = a + b$.

Доказательство. Положим $a_n + b_n = c_n$ и $a + b = c$. Для краткости будем обозначать

$$(\exists n)(\forall p)(|a_{n+p} - a| < 2^{-k}) \text{ посредством } \mathfrak{A}(k),$$

$$(\exists n)(\forall p)(|b_{n+p} - b| < 2^{-k}) \text{ посредством } \mathfrak{B}(k),$$

$$(\exists n)(\forall p)(|c_{n+p} - c| < 2^{-k+1}) \text{ посредством } \mathfrak{C}(k).$$

Тогда $\mathfrak{A}(k) \wedge \mathfrak{B}(k) \to \mathfrak{C}(k)$, поэтому

$\neg\neg\mathfrak{A}(k) \wedge \neg\neg\mathfrak{B}(k) \to \neg\neg\mathfrak{C}(k)$

(применение (11) и (3) из 7.1.2).

$$(\forall k)\neg\neg\mathfrak{A}(k) \wedge (\forall k)\neg\neg\mathfrak{B}(k) \to (\forall k)\neg\neg\mathfrak{C}(k).$$

Это доказывает теорему.

Т е о р е м а 3. Если $^{-}\lim a_n = a$ и $^{-}\lim a_n = b$, то $a = b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $^{-}\lim a_n = b$ следует, что $^{-}\lim(-a_n) = -b$. Поэтому по теор. 2 имеем $^{-}\lim c_n = a - b$, где каждое $c_n = 0$.

$$(\forall k)\neg\neg(\exists n)(\forall p)(|a-b| < 2^{-k}),$$
$$(\forall k)\neg\neg(|a-b| < 2^{-k}),$$
$$(\forall k)(|a-b| \not> 2^{-k}),$$
$$a = b.$$

Следующая теорема не имеет параллели в позитивной теории.

Т е о р е м а 4. Всякая ограниченная монотонная последовательность действительных чисел не колеблется.

Пусть для последовательности $\{a_n\}$

1) $$(\forall n)(a_n < M),$$

2) $$(\forall n)(a_{n+1} \not< a_n).$$

Нужно доказать, что

(3) $$(\forall k)\neg\neg(\exists n)(\forall p)(a_{n+p} - a_n < 2^{-k}),$$

т. е. что

(4) $$\neg(\exists k)(\forall n)\neg(\forall p)(a_{n+p} - a_n < 2^{-k}).$$

Предположим, что у нас есть такое k_1, что

(5) $$(\forall n)\neg(\forall p)(a_{n+p} - a_n < 2^{-k_1}).$$

Достаточно получить противоречие, исходя из (1), (2)

и (5). Тогда из $\neg(\exists p)(a_{n+p} - a_n > 2^{-k_1-1})$ следует, что $(\forall p)(a_{n+p} - a_n < 2^{-k_1})$, так что из (5) выводится

$$(6)\qquad (\forall n)\neg\neg(\exists p)(a_{n+p} - a_n > 2^{-k_1-1}).$$

Теорема будет доказана, если мы получим противоречие из (1), (2) и (6).

Как частный случай (6) имеем

$$(7)\qquad \neg\neg(\exists p)(a_p - a_1 > 2^{-k_1-1}).$$

Предположим, что у нас есть такое p_1, что $a_{p_1} - a_1 > 2^{-k_1-1}$; тогда в силу (6) имеем $\neg\neg(\exists r)(a_r - a_{p_1} > 2^{-k_1-1})$ и далее $\neg\neg(\exists r)(a_r - a_1 > 2\cdot 2^{-k_1-1})$. Итак, исходя из (1), (2) и (6), мы доказали:

$$(8)\quad (\exists p)(a_p - a_1 > 2^{-k_1-1}) \to \neg\neg(\exists r)(a_r - a_1 > 2\cdot 2^{-k_1-1}).$$

Используя правила (3) и (5) исчисления предложений из 7.1.2, мы заключаем из (7) и (8), что

$$(9)\qquad \neg\neg(\exists r)(a_r - a_1 > 2\cdot 2^{-k_1-1}).$$

Повторяя это рассуждение $h - 1$ раз, мы находим

$$(10)\qquad \neg\neg(\exists s)(a_s - a_1 > h2^{-k_1-1}).$$

Возьмем теперь $h = \left[\frac{M - a_1}{2^{-k_1-1}}\right] + 1$; находим

$$(11)\qquad \neg\neg(\exists s)(a_s > M),$$

что противоречит (1).

Замечание. Легко доказать, что вместо (1) достаточно взять условие $\neg\neg(\exists M)(\forall n)(a_n < M)$.

7.3.3. *Негативное истолкование классического анализа*

Гёдель впервые доказал [Гёдель, 1932], что классическое исчисление предложений и классическая арифметика могут быть развиты как части соответствующих интуиционистских систем. Для доказательства таких теорем необходима формализация нужных частей интуицио-

нистской математики. Замечания, сделанные мною относительно интуиционистского исчисления предложений, применимы к любой формальной системе, которая построена с целью представления интуиционистской математической теории: никогда нельзя строго доказать, что такая система адекватна. Однако для исчисления предложений, исчисления предикатов и для элементарной арифметики были построены формальные системы, в которых каждая формула при правильном истолковании выражает теорему интуиционистской математики. Эти системы подробно описаны в книге Клини [Клини, 1952, стр. 492][90]). Он оформляет их так, что, присоединяя к каждой из них аксиому $\neg\neg p \to p$, мы получаем соответствующую классическую систему.

Клини доказывает различные варианты теоремы Гёделя. Ниже приведены три из них.

Определение 1. $p + q$ означает $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

$$p \supset q \text{ означает } \neg(p \wedge \neg q),$$

$$(\bigvee x)\, p(x) \text{ означает } \neg(\forall x) \neg p(x).$$

В силу (11) и (12) из 7.2.2 последнее эквивалентно $\neg\neg(\exists x)\, p(x)$.

Теорема 1. Для исчисления предложений с $\wedge$ в качестве конъюнкции, $+$ в качестве дизъюнкции, $\supset$ в качестве импликации и $\neg$ в качестве отрицания всякая классически доказуемая формула верна интуиционистски.

Теорема 2. Для теоретико-числовой формальной системы (элементарной арифметики) с $\wedge$ в качестве конъюнкции, $+$ в качестве дизъюнкции, $\supset$ или $\to$ в качестве импликации, $\neg$ в качестве отрицания и $(\bigvee)$ в качестве квантора существования всякая классически доказуемая формула верна интуиционистски.

Теорема 3. Для исчисления предикатов с $\wedge$ в качестве конъюнкции, $+$ в качестве дизъюнкции, $\supset$ или $\to$ в качестве импликации и $(\bigvee)$ в качестве квантора существования всякая классически доказуемая формула становится верной интуиционистски после замены всякой встречающейся элементарной формулы $\mathfrak{p}$ на $\neg\neg\mathfrak{p}$.

З а м е ч а н и е. Для исчисления высказываний замена $\mathfrak{p}$ на $\neg\neg\mathfrak{p}$ не является обязательной в силу того, что $\neg\neg\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}$, т. е. $\neg(\neg\neg\mathfrak{p}\wedge\neg\mathfrak{p})$ истинная формула. В теоретико-числовой системе к этой замене можно также не прибегать, так как элементарные формулы имеют форму $a=b$ или $a>b$, где a и b натуральные числа, а потому истинно $\neg\neg(a=b)\rightarrow a=b$ и $\neg\neg(a>b)\rightarrow$ $\rightarrow a>b$.

Эти теор мы доказывают непротиворечивость классических систем относительно соответствующих интуиционистских систем.

Я применю теперь эти теоремы к арифметике действительных чисел. ЧГ был определен как последовательность Коши, состоящая из рациональных чисел. Для применения теоремы 2 нужно подставить в определение последовательности Коши $(\vee x)$ вместо $(\exists x)$, так что мы получим определение неколеблющейся последовательности.

О п р е д е л е н и е 2. *Слабым действительным числовым генератором* [СЧГ) будем называть неколеблющуюся последовательность рациональных чисел.

Определение совпадения для ЧГ имело следующий вид: если $a=\{a_n\}$ и $b=\{b_n\}$, то $a=b$ означает, что

$$(\forall k)(\exists n)(\forall p)(|a_{n+p}-b_{n+p}|<2^{-k}).$$

О п р е д е л е н и е 3. СЧГ $a=\{a_n\}$ и $b=\{b_n\}$ *совпадают в слабом смысле* $(a\doteq b)$, если

$$(\forall k)(\vee n)(\forall p)(|a_{n+p}-b_{n+p}|<2^{-k}).$$

О п р е д е л е н и е 4. *Слабое действительное число* есть вид СЧГ, совпадающих в слабом смысле с данным СЧГ.

Определение отношения порядка для ЧГ формулировалось следующим образом: $a>b$ означало, что

$$(\exists k)(\exists n)(\forall p)(a_{n+p}-b_{n+p}>2^{-k}).$$

О п р е д е л е н и е 5. *Для* СЧГ $a=\{a_n\}$ и $b=\{b_n\}$; *a больше b в слабом смысле* $(a\dot{>}b)$, если

$$(\vee k)(\vee n)(\forall p)(a_{n+p}-b_{n+p}>2^{-k}).$$

Это эквивалентно двойному отрицанию $a > b$, так как по (11) и (12) из 7.2.2 мы легко получаем, что $\neg\neg (\exists x)\, p\,(x)$ эквивалентно $\neg\neg (\exists x) \neg\neg p\,(x)$.

Как следствие теоремы 2 получается

Теорема 4. Пусть S — система, которая получается из теоретико-числовой формальной системы присоединением к ней свободных переменных для действительных чисел и отношений $=$ и $>$ для них же. Пусть T теорема классической арифметики, формализуемая в S. Пусть T' теорема, получаемая из T замещением $\vee$ на $+$, $(\exists x)$ на $(\mathsf{V} x)$, переменных для действительных чисел — переменными для слабых действительных чисел, $=$ на $\dot{=}$, $>$ на $\dot{>}$. Тогда T интуиционистски истинно [91]).

Чтобы распространить теорему 4 на анализ, необходимо распространить теорему 2 или теорему 3 на исчисление предикатов более высоких порядков или на какие-нибудь другие исчисления, в которых можно формализовать основную часть классического анализа. Возможно, что таким путем можно доказать непротиворечивость анализа относительно интуиционистской математики.

VIII. СПОРНЫЕ ВОПРОСЫ

8.1. Бесконечно продолжающиеся последовательности, зависящие от решения проблем

8.1.1. *Метод*

Начиная с 1948 г. Брауэр опубликовал несколько статей (многие из них на голландском языке), в которых он дает противоречащие примеры для некоторых классических теорем [Брауэр, 1948, стр. 1246; 1948A; 1948B; 1949; 1949A; 1950; 1950A; 1951; 1952B; 1954B; 1954 C]. Все эти примеры основаны на принципе, который он изложил в докладе на 10-м Международном философском конгрессе (Амстердам, 1948). Я проиллюстрирую этот принцип посредством следующих определений.

Будем говорить, что математическое предложение $\mathfrak{p}$ испытано, если доказано либо $\neg\,\mathfrak{p}$, либо $\neg\neg\,\mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{p}$ — некоторое неиспытанное предложение (например, «последовательность 0123456789 входит в десятичное разложение π»). Теперь я следующим образом определю ЧГ $a = \{a_n\}$. Пока $\mathfrak{p}$ не испытано, я выбираю $a_n = 2^{-n}$, если же $\mathfrak{p}$ испытано между выбором a_m и выбором a_{m+1}, то я выбираю $a_{m+q} = 2^{-m}$ для любого q.

Сигн. Это не звучит как математическое определение. Разве можно считать хорошо определенной последовательность рациональных чисел, если ее компоненты зависят от такого материального факта, как существование к данному моменту доказательства некоторого математического высказывания?

Инт. Я согласен с этим возражением; и я, конечно, сомневаюсь, можно ли посоветовать вводить такие определения в математику. Как я подчеркнул раньше, словесное определение не может быть абсолютно свободным от двусмыслен-

ности; теперь мы видим, что определение БПП оставляет нам некоторый простор. В таких случаях мы свободны решить, какое истолкование нужно принять.

Форм. Как заметил ван Данциг [ван Данциг, 1949], определение Брауэра и рассуждения, которые он основывает на этом определении, могут быть полностью оправданы с формальной точки зрения.

Инт. Метод ван Данцига (как указывает он сам) проливает свет на данный вопрос с точки зрения его интуиционистского понимания. Я попытаюсь вкратце охарактеризовать его точку зрения.

Пусть ω_i $(i = 1, 2, \ldots)$ при каждом i является конечным множеством математических выводов. Последовательность $\{\omega_i\}$ будет обозначаться посредством Ω.

Положим $\sigma_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \omega_i$. Пусть $\mathfrak{p}$ — математическое предложение. ЧГ a зависит от Ω; $a(\Omega) = \{a_n(\Omega)\}$. Если σ_n не содержит вывода ни для $\neg\mathfrak{p}$, ни для $\neg\neg\mathfrak{p}$, то $a_n(\Omega) = 2^{-n}$. Если σ_m содержит вывод $\neg\mathfrak{p}$, или вывод $\neg\neg\mathfrak{p}$ и m — наименьшее из n, таких, что σ_n обладает этим свойством, то $a_n(\Omega) = 2^{-m}$. В такой форме определение a звучит более математически. Однако остается вопрос, может ли оно служить целям Брауэра.

Брауэр хотел показать, что может иметь место $a \neq 0$, в то время как $a \# 0$ будет оставаться недоказанным (это и есть пример, обещанный мною в 2.2.3). Действительно, если мы предположим, что $a = 0$, то ни $\neg\mathfrak{p}$, ни $\neg\neg\mathfrak{p}$ недоказуемы, значит, $\neg\neg\mathfrak{p}$ и $\neg\neg\neg\mathfrak{p}$ вместе истинны, что невозможно. Поэтому $a \neq 0$ [92]. С другой стороны, $a \# 0$ означало бы возможность нахождения такого q, что $a > 2^{-q}$. Отсюда следовало бы, что $\mathfrak{p}$ испытывается до выбора a_q. Это же можно знать только тогда, когда $\mathfrak{p}$ действительно испытано. Заметим, что $a \# 0$ не ведет к противоречию, ибо тогда мы имели бы $a = 0$.

Очевидно, Брауэр предполагает, что ему неизвестно заранее, какие выводы будут делаться; если бы был принят обязательный для всего населения земного шара закон, запрещающий делать какие бы то ни было математические выводы, то его доказательство для $a \neq 0$ не проходило бы [93].

В варианте ван Данцига получается следующий результат. При данном n утверждение «$a = 0$, каковы бы ни были

$\omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \ldots$», ложно. Если $a \# 0$, то известно такое q, что в σ_q встречается либо доказательство $\neg\, \mathfrak{p}$, либо доказательство $\neg\neg\, \mathfrak{p}$.

Сигн. Таким образом, в терминологии ван Данцига мы не получаем такого действительного числа a, что $a \neq 0$, в то время как $a \# 0$ недоказано.

Инт. Да, это так. Лично я предпочитаю терминологию ван Данцига, избегающую некоторой двусмысленности слов Брауэра. Ван Данциг тонко анализирует определение Брауэра и вводит много уточнений, которые вы можете найти в его статье. По-моему, не очень важно, выражаем ли мы результат словами Брауэра или ван Данцига, если мы понимаем, что при этом подразумевается. И не важно также, называем ли мы его математическим результатом. Во всяком случае, он показывает, что было бы глупо (foolish) искать доказательство эквивалентности отношений $\neq$ и $\#$ для действительных чисел [94]).

Класс. Я был в этом убежден, начиная с 2.2.3.

Инт. Пример Брауэра вскрывает одну из подсознательных причин, обусловивших это ваше убеждение.

На основании примера Брауэра можно также доказать, что виртуальный порядок континуума не является псевдопорядком (см. 7.3.1).

Позвольте мне повторить этот пример. Пусть $\mathfrak{p}$ — неиспытанное предложение. Определим ЧГ $a = \{a_n\}$ следующим образом. Если $\mathfrak{p}$ еще не испытано, выбираем $a_n = 2^{-n}$, но если $\mathfrak{p}$ испытывается между выбором a_m и выбором a_{m+1}, то выбираем $a_{m+q} = 2^{-m}$ при любом q. Теперь следующим образом определим $c = \{c_n\}$. Если $\mathfrak{p}$ еще не испытано, то выбираем $c_n = 2^{-n}$, если же $\mathfrak{p}$ испытывается между выбором a_m и выбором a_{m+1}, причем *m четно*, то при каждом q выбираем $c_{m+q} = 2^{-m}$; если же, наконец, $\mathfrak{p}$ испытывается между выбором a_m и выбором a_{m+1}, причем *m нечетно*, то при каждом r, большем чем m, продолжаем выбирать $c_r = 2^{-r}$.

Если $c \# 0$, то $c = a$; значит, из $a \dot{>} c$ следует $c = 0$. Если $c \dot{>} 0$, то $c \neq 0$. Таким образом, «$a \dot{>} c$ или $c \dot{>} 0$» влекло бы «$c = 0$ или $c \neq 0$», откуда следовало бы «$\mathfrak{p}$ не будет испытано непосредственно после четного числа выборов для a, или невозможно, что $\mathfrak{p}$ не будет испытано непосредственно после четного числа выборов для a». Но пока

$\mathfrak{p}$ не будет испытано, мы ничего не сможем знать о числе выборов для a, после которых $\mathfrak{p}$, может быть, будет испытано. Хотя $a \dot{>} 0$ [95]), нельзя утверждать ни $a \dot{>} c$, ни $c \dot{>} 0$, а потому условие (6) из 7.3.1 не выполняется.

8.1.2. *Противоречивость классической арифметики вещественных чисел*

Начиная с этого места, я буду пользоваться терминологией Брауэра, уже разъясненной в той степени, что если вы захотите, то сами сможете заменить ее другой терминологией.

Теоремы этого раздела сильнее теорем предыдущего раздела в том отношении, что они выражают собою противоречивость некоторых классических результатов.

Теорема 1. Противоречиво, что для любого действительного числа a из $a \neq 0$ следует $a \# 0$.

Доказательство. Пусть J — финитарный поток, совпадающий с промежутком $[0, 1]$ (теор. 1 из 3.4.1). Мы одновременно будем определять элемент f из J и ЧГ $a(f) = \{a_n(f)\}$ следующим образом. Если $g \in J$, то пусть $\mathfrak{p}(f)$ означает высказывание «f рационально». При каждом n число f_n выбирается между выбором $a_n(f)$ и выбором $a_{n+1}(f)$. Если $\mathfrak{p}(f)$ еще не испытано, то мы выбираем $a_n(f) = 2^{-n}$. Если $\mathfrak{p}(f)$ испытывается между выбором a_m и выбором a_{m+1}, то мы выбираем $a_{m+q} = 2^{-m}$ при любом q. Как и в предыдущем примере, при любом f имеет место $a(f) \neq 0$ [96]). Предположим, что при всяком f имеет место $a(f) \# 0$. Тогда для всякого f можно найти такое натуральное число $r(f)$, что $\mathfrak{p}(f)$ испытывается перед выбором $a_{r+1}(f)$, т. е. перед выбором f_{r+1}. По теореме о веерах можно найти максимальное значение s для $r(f)$; следовательно, $\mathfrak{p}(f)$ при каждом f испытывается перед выбором f_{s+1}. Пусть теперь f обозначает БПП, на которую после выбора f_s не накладывается никаких других ограничений, кроме ограничений, содержащихся в определении J. Ясно, что мы можем продолжать f таким способом, чтобы f стало рациональным или иррациональным в зависимости от нашего желания. Следовательно, противоречиво, что $\mathfrak{p}(f)$ проверяется перед выбором f_{s+1}.

Поэтому истинны оба суждения: $(\forall f)(a(f) \neq 0)$ и $\neg(\forall f)(a(f) \# 0)$, где f пробегает J.

Форм. Очевидно, что при таких формальных обозначениях нужно понимать кванторы в расширенном смысле в соответствии с брауэровским расширением понятия БПП.

Инт. Из данного доказательства вытекает также противоречивость того, что при любом действительном a из $a \neq 0$ и $a \nless 0$ следует $a > 0$ (или в терминологии 7.3.1, что из $a \dot{>} 0$ следует $a > 0$).

Чтобы доказать противоречивость классической элементарной арифметики, Брауэр доказывает следующее обобщение теор. 1.

Теорема 2. Противоречиво, что при любом действительном a из $a \neq 0$ следует $a \ngtr 0 \vee a \nless 0$.

Доказательство. Пусть опять J обозначает финитарный поток, совпадающий с $[0, 1]$, f произвольный элемент J и $\mathfrak{p}(f)$ — высказывание «f рационально». Мы определим f и ЧГ $b(f) = \{b_n(f)\}$ следующим образом. При каждом n число f_n выбирается между выбором $b_n(f)$ и выбором $b_{n+1}(f)$. Если $\mathfrak{p}(f)$ еще не испытано, то выбираем $b_n(f) = (-1)^n 2^{-n}$. Если между выбором $b_m(f)$ и выбором $b_{m+1}(f)$ высказывание $\mathfrak{p}(f)$ было испытано и оказалось, что f иррационально, то мы выбираем $b_{m+q}(f) = 2^{-m}$ при всяком q. Если же, наконец, $\mathfrak{p}(f)$ было испытано и оказалось, что f неиррационально, то при всяком q выбираем $b_{m+q}(f) = -2^{-m}$. Как и раньше, $b(f) \neq 0$ [97]). Предположим, что для любого f из J или $b(f) \ngtr 0$, или $b(f) \nless 0$.

Если f иррационально, то $b(f) > 0$. Поэтому если $b(f) \ngtr 0$, то f не может быть иррационально.

Если f неиррационально, то $b(f) < 0$. Поэтому, если $b(f) \nless 0$, то f иррационально ((2) и (5) из 7.1.2). Таким образом, $[0, 1]$ разбивается на подвид иррациональных чисел и подвид неиррациональных чисел. А это противоречит теор. 2 из 3.4.3.

Следствие. Противоречиво, что для каждого действительного x имеем $x \ngtr 0$ или $x \nless 0$ [98]).

Теорема 3. Противоречиво, что уравнение $ax + b = 0$, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$ всегда имеет решение.

Доказательство. Пусть c действительное число и $c \neq 0$. Положим $a = c + 2|c|$, $b = c - 2|c|$. Тогда

$a \neq 0$ и $b \neq 0$. Пусть x_1 — решение уравнения $ax + b = 0$. Если $c > 0$, то $a = -3b$. Значит, $b(3x_1 - 1) = 0$ и $x_1 = 1/3$. Если $c < 0$, то $b = -3a$, т. е. $a(x_1 - 3) = 0$ и $x_1 = 3$. Поэтому если $x_1 \neq 1/3$, то $c \not> 0$, а если $x_1 \neq 3$, то $c \not< 0$. Так как всегда $x \neq 1/3$, или $x \neq 3$, то имеем $c \not> 0$ или $c \not< 0$. Значит, если бы $ax + b = 0$ при каждом $c \neq 0$ имело решение, то из $c \neq 0$ следовало бы, что $c \not> 0$ или $c \not< 0$. А это противоречит теор. 2.

Следствие. В евклидовой геометрии плоскости противоречиво, что любые две несовпадающие непараллельные прямые пересекаются. В самом деле, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, а d действительное число, отделенное от нуля, то $ax + dy = b$ есть уравнение прямой, не совпадающей с осью Ox и не параллельной ей. Если бы все такие прямые пересекали ось Ox, то при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ уравнение $ax = b$ всегда имело бы решение [99]).

8.1.3. *Пример, касающийся теоремы Больцано — Вейерштрасса*

Эта теорема обсуждалась в 3.4.4. Вот одна из ее формулировок:

(С) Всякий ограниченный вид действительных чисел без точки накопления численно ограничен.

Пусть $\mathfrak{p}$ — некоторое еще не испытанное высказывание. Образуем следующим образом БПП рациональных чисел $\{b_n\}$. Пока $\mathfrak{p}$ еще не испытано, выбираем $b_n = 2^{-n}$. Если $\mathfrak{p}$ испытывается между выбором b_m и выбором b_{m+1}, то выбираем $b_{m+p} = 2^{-m}$ при любом p. Пусть S — вид компонент b_n этой последовательности. Предположим, что c точка накопления S. Ясно, что $c \not< 0$. Однако справедливо также, что $c \not> 0$. В самом деле, из $c > 0$ следовала бы конечность S. Поэтому $c = 0$, т. е. $\mathfrak{p}$ никогда не может быть испытано, что противоречиво [100]). Поэтому у S нет точки накопления. С другой стороны, будь вид S численно ограниченным, мы знали бы такое натуральное m, что $\mathfrak{p}$ испытывалось бы до выбора b_{m+1}. Ясно, что последнее не имеет места, а потому нет никакой надежды найти интуиционистское доказательство для (С) [101]) [Брауэр, 1952В].

8.2. Математика без отрицания

Грисс выдвинул серьезные возражения против использования отрицания в математике [Фрейденталь, 1936 А; Гейтинг, 1936; Грисс, 1946, стр. 24 и стр. 64; 1948; 1948 А]. Соглашаясь полностью с основными идеями Брауэра о природе математики, Грисс, считает, что всякое математическое понятие имеет своим началом некоторое актуально выполнимое математическое построение. Если построение невозможно, то понятие не может быть ясным.

Брауэр допускает теоремы вроде следующей: «Не может существовать квадратного круга». Мы можем доказать эту теорему, приводя к противоречию утверждение, что мы построили круг, являющийся также квадратом. Согласно Гриссу, это предположение не имеет ясного смысла, так как оно никогда не сможет быть реализовано. Другими словами, если квадратный круг не существует, то как можем мы иметь ясное представление о том, каким он был бы, если бы существовал? Грисс поэтому отвергает использование отрицания как математического понятия.

Во многих случаях доказательство негативной теоремы подсказывает ее позитивную форму. Например, в доказательстве несуществования квадратного круга мы встречаем примерно следующее утверждение.

«Если S квадрат и P — любая точка, то на границе S можно найти такие точки Q и R, что $PQ \# PR'$».

Для Грисса данное позитивное утверждение выражает действительное содержание негативной теоремы. Конечно, в большинстве случаев одна негативная теорема допускает несколько позитивных переводов. Грисс попытался перестроить интуиционистскую математику, не используя отрицания, и достиг в этом направлении некоторых замечательных результатов [Грисс, 1946 А; 1950; 1951].

В арифметике целых и рациональных чисел отрицание существенным образом не используется. $a \neq b$ в ней означает то же самое, что $a > b \vee a < b$, а в этом выражении отрицания нет. В этих лекциях первым встретившимся нам негативным понятием было понятие неравенства между действительными числами $a \neq b$. Грисс не может считать это понятие хорошо определенным; вместо него он использует позитивно определенное отношение $a \# b$. Однако среди основных свойств отношения $\#$ имеется следующее

$a \# b \to a = b$. Вместо этого свойства у Грисса фигурирует следующая теорема.

Теорема. Если a и b — такие действительные числа, что любое действительное число c, отделенное от a, отделено и от b, то $a = b$.

Для этой теоремы нелегко дать доказательство, не использующее отрицаний. Гриссу удалось это сделать только посредством применения теоремы о веерах.

Пусть a и b удовлетворяют условиям теоремы. Мы можем предположить, что a и b определены посредством канонических ЧГ $a = \{a_n 2^{-n}\}$ и $b = \{b_n 2^{-n}\}$, таких, что $|a - a_n 2^{-n}| < 2^{-n}$, $|b - b_n 2^{-n}| < 2^{-n}$. При данном значении n либо $b_n < a_n$, либо $b_n = a_n$, либо $b_n > a_n$. Сначала предположим, что $b_n > a_n$. Рассмотрим промежуток $i = [(a_n - 1)2^{-n}, (b_n - 1)2^{-n}]$ и построим, как в теор. 1 из 3.4.1, финитарный поток S_i, совпадающий с i. Пусть $c = \{c_m 2^{-m}\}$ является элементом S_i. Тогда $c < b$, так что в силу предположения имеем $c \# a$. Это означает, что

$$(\exists k)(\exists m)(\forall p)(|c_{m+p} - a_{m+p}| 2^{-m-p} > 2^{-k}).$$

Тогда тем более

$$(\exists k)(\forall p)(|c_{k+p} - a_{k+p}| 2^{-k-p} > 2^{-k}).$$

Поэтому каждому элементу c из S можно сопоставить такое натуральное число k, что выполняется условие

$$(1) \qquad (\forall p)(|c_{k+p} - a_{k+p})| 2^{-k-p} > 2^{-k}).$$

По теореме о веерах мы можем найти такое r, что k вычисляется после выбора первых r компонент c. Тогда k принимает лишь конечное число значений и мы можем найти $k_0 = \max\limits_{c \in S_i} k$ так, чтобы

$$(2) \qquad |c_{k_0} - a_{k_0}| 2^{-k_0} > 2^{-k_0}$$

имело место для любого c из S, т. е. для любого узла $c_{k_0} 2^{-k_0}$ k_0-решетки, принадлежащего i.

Имеем $a_{k_0} 2^{-k_0} > (a_n - 1)2^{-n}$. Более того, в силу (2) $a_{k_0} 2^{-k_0}$ отлично от любого узла k_0-решетки, принадлежа-

щего i (для рациональных чисел отличность является позитивным понятием!). Поэтому $a_{k_0}2^{-k_0} > (b_n - 1)2^{-n}$. Но имеем также $a_{k_0}2^{-k_0} < (a_n + 1)2^{-n}$, так что $b_n < a_n + 2$. Мы предположили, что $b_n > a_n$, поэтому $b_n = a_n + 1$. Аналогично если $b_n < a_n$, то $b_n = a_n - 1$. Мы доказали, что для каждого n имеет место $|b_n - a_n| \leqslant 1$. Поэтому $b = a$.

В теории потоков и видов не может быть определен пустой вид. Вид, как это было объяснено в 3.2.1, задается свойством математических объектов, но такое свойство может иметь ясный смысл только после того, как мы построили объект с этим свойством. Ввиду этого требования пересечение двух видов определимо только тогда, когда оно содержит по крайней мере один элемент. Например, мы можем говорить о виде алгебраических полей и о виде шестиэлементных видов, но не об их пересечении. Отношение различия между видами определяется по индукции следующим образом. Два вида различны, если в одном из них содержится элемент, отличный от любого элемента другого вида.

В силу ряда причин логику математики, не использующей отрицания, трудно формализовать. Прежде всего нет никакого исчисления предложений, так как имеют смысл только истинные предложения. Далее нужно принимать во внимание ограничения при применении конъюнкций пропозициональных функций (видов). Попытки формализации предпринимались Гриссом [Грисс, 1949 А; 1950 А], Гилмором [Гилмор, 1953] и Вредендейном [Вредендейн, 1953].

БИБЛИОГРАФИЯ

Данная библиография включает: 1) работы, упомянутые в тексте, 2) другие важные книги и статьи, относящиеся к интуиционизму. Почти полную библиографию по интуиционизму, доходящую до 1951 г., можно найти в работе [Гейтинг, 1955].

Белинфанте (Belinfante M. I.)

1931. Die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes in der intuitionistichen Mathematik, *Proc. Akad. Amsterdam*, **34**, 401—412.

1941. Elemente der intuitionistischen Funktionentheorie, *Proc. Akad. Amsterdam*, **44**, 173—185, 276—285, 420—425, 563—567, 711—717.

Бет (Beth E. W.)

1947. Semantical considerations on intuitionistic mathematics, *Proc. Akad. Amsterdam*, **50**, 1246—1251; *Indagationes math.*, **9**, 572—577.

1948. Wijsbegeerte der wiskunde, 2 ed., Antwerpen—Nijmegen, 1948.

1955. Les fondaments logiques des mathématiques, 2 ed., Paris — Louvain, 1955.

Брауэр (Brouwer L. E. I.)

1907. Over de grondslagen der wiskunde, Thesis, Amsterdam, 1907.

1908. De onbetrouwbaarheid der logische principes, Tijdschrift voor wijsbegeerte, **2**; перепечатано в работе [Брауэр, 1919].

1912. Intuitionisme en formalisme, Groningen, 1912; английский перевод: [Брауэр, 1913].

1913. Intuitionism and formalism, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **20**, 81—96.

1918. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Teil I, *Verhandelingen Akad. Amsterdam*, **12**, № 5.

1919. Wiskunde, waarheid, werkelijkheid, Groningen, 1919.

1919A. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Teil II, *Verhandelingen Akad. Amsterdam*, **12**, № 7.

1919B. Intuitionistische Mengenlehre, *Jahresbericht deutsch. Math. Ver.*, **28**, 203—208; *Proc. Akad. Amsterdam*, **23**, 949—954.

1920. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? *Proc. Akad. Amsterdam*, **23**, 955—965.

1923. Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, *Verhandelingen Akad. Wet. Amsterdam*, **13**, № 2.

1924. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, I, *Mathematische Annalen*, **93**, 244—258.

1924A. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, *J. reine angew. Math. (Crelle)*, **154**, 1—8.

1924B. Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist, *Proc. Akad. Amsterdam*, **27**, 189—194.

1924C. Intuitionistische Ergänzung des Fundamentalsatzes der Algebra, *Proc. Akad. Amsterdam*, **27**, 631—634.

1924D. Bemerkungen zum Beweise der gleichmässigen Stetigkei voller Funnktionen. *Proc. Akad. Amsterdam*, **27**, 644—646.

1925. Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, *Jahresbericht deutsch. Math. Ver.*, **33**, 251—256.

1925A. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, II, *Math Annalen*, **95**, 453—473.

1925B. Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, *Proc. Acad. Amsterdam*, **28**, 503—506.

1926. Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, III, *Math. Annalen*, **96**, 451—489.

1926A. Über Definitionsbereiche von Funktionen, *Math. Annalen*, **97**, 60—76.

1926B. Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes, *Proc. Akad. Amsterdam*, **29**, 855—864.

1926C. Die intuitionistische Form des Heine — Borelschen Theorems, *Proc. Akad. Amsterdam*, **29**, 866—868.

1927. Virtuelle Ordnung und unerweiterbare Ordnung, *J. Reine angew. Math (Crelle)*, **157**, 255—258.

1927A. Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, *Proc. Akad. Amsterdam*, **31**, 374—379; *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 48—52.

1928. Die Struktur des Kontinuums, Vienna, 1928.

1929. Mathematik, Wissenschaft und Sprache, *Monatshefte Math. Phys.*, **36**, 153—164.

1933. Weten, Willen, Spreken. *Euclides*, **9**, 177—193.

1942. Zum freien werden von Mengen und Funktionen, *Proc. Akad. Amsterdam*, **45**, 322—323; *Indagationes math.*, **4**, 107—108.

1942A. Die repräsentierende Menge der stetigen Funktionen des Einheitskontinuums, *Proc. Akad. Amsterdam*, **45**, 443; *Indagationes math.*, **4**, 154.

1947. Richtlijnen der intuitionistische wiskunde, *Proc. Akad. Amsterdam*, **50**, 339; *Indagationes math.*, **9**, 197.

1948. Consciousness, philosophy and mathematics, Proc. X Intern. Congress Philosophy, Amsterdam, 1948, 1235—1249.

1948A. Essentieel negatieve eigenschappen, *Proc. Akad. Amsterdam*, **51**, 963—965; *Indagationes math.*, **10**, 322—324.

1948B. Opmerkingen over het beginsel van het uitgelosten derde en over negatieve asserties, *Proc. Akad. Amsterdam*, **51**, 1239—1244; *Indagationes math.*, **10**, 383—388.

1949. De non-aequivalentie van de constructieve en de nagatieve orderelatie in het continuum, *Proc. Akad. Amsterdam*, **52**, 122—125; *Indagationes math.*, **11**, 37—40.

1949A. Contradictoriteit der elementaire meetkunde, *Proc. Akad. Amsterdam*, **52**, 315—316; *Indagationes math.*, **11**, 89—90.

1950. Remarques sur la notion d'ordre, *Comptes rendus Akad. Sci. Paris*, **230**, 263—265.

1950A. Sur la possibilité d'ordonner le continu, *Comptes rendus Akad. Sci. Paris*, **230**, 349—350.

1951. On order in the continuum and the relation of truth to noncontradictority, *Proc. Akad. Amsterdam*, *Ser. A*, **54**, 357—359; *Indagationes math.*, **13**, 357—359.

1952. Historical background, principles and methods of intuitionism, *South-African J. Sci.*, **49**, 139—146.

1952A. An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere, *Proc. Royal Soc. London*, *A*, **213**, 1—2.

1952B. Over accumulatiekernen van oneindige kernsoorten, *Proc. Akad. Amsterdam.*, *Ser. A*, **55**, 439—442; *Indagationes math.*, **14**, 439—442.

1954. Points and spaces, *Canadian J. math.*, **6**, 1—17.

1954A. Ordnungswechsel in Bezug auf eine coupierbare geschlossene stetige Kurwe, *Proc. Akad. Amsterdam*, *Ser. A*, **57**, 112—114; *Indagationes Math.*, **16**, 112—114.

1954B. Intuitionistische differentieerbarheid, *Proc. Akad. Amsterdam*, *Ser. A*, **57**, 201—204; *Indagationes math.*, **16**, 201—204.

1954C. An example of contradictority in classical theory of functions, *Proc. Akad. Amsterdam.*, *Ser. A*, **57**, 204—206; *Indagationes math.*, **16**, 204—206.

Б р а у э р и де Л о о р (B r o u w e r L. E. J., d e L o o r B.)
1924. Intuitionistischer Beweis des Fundamenalsatzes der Algebra, *Proc. Akad. Amsterdam*, 27, 186—188.

Б у р б а к и (B o u r b a k i N.)
1948. L'Architecture des mathematiques, Cahiers du Sud, 1948. [Русский перевод: Б у р б а к и Н., Архитектура математики, *Математическое просвещение* (1960), вып. 5, 99—112; Б у р б а к и Н., Очерки по истории математики, М., 1963, 245—259].
1949. Foundations of mathematics for the working mathematician, *J. Symbolic Logic*, **14**, 1—8.

В е й л ь (W e y l H.)
1919. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, *Math. Zeitschr.*, **10**, 39—79.
1924. Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik, *Math. Zeitschr.*, **20**, 131—150.

В р е д е н д е й н (V r e d e n d u i n P. G. S.)
1953. The logic of negationless mathematics, *Compositio math.*, **11**, 204—277.

Г ё д е л ь (G ö d e l K.)
1932. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines math. Kolloquiums (Wien), Heft 4, 34—38.
1932 A. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, Ergebnisse eines math. Kolloquiums (Wien), Heft 4, 39—40.

Г е й т и н г (H e y t i n g A.)
1925. Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde, Thesis, Amsterdam, Groningen, 1925.
1927. Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation, *Math. Annalen*, **98**, 465—490.
1927. Zur intuitionistischen Axiomatik der projektiven Geometrie, *Math. Annalen*, **98**, 491—538.
1929. De telbaarheidspraedicaten van Prof Brouwer, *Nieuw Archif voor wiskunde* (2), **16**, 47—58.
1930. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logic, *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1930), 42—56.
1930A. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1930), 57—71, 158—169.
1934. Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1934. [Русский перевод: Г е й т и н г А., Обзор исследований по основаниям математики, М.—Л., ОНТИ, 1936.]

1935. Intuitionistische wiskunde, *Mathematica B* (Leiden) **4**, 72—82, 123—136; **5**, 62—80, 105—112; **7**, 129—141.

1936. Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal «Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln», *Compositio math.*, **4**, 117—118.

1941. Untersuchungen über intuitionistische Algebra, *Verhandelingen, Akad. Amsterdam*, 1. sectie **18**, № 2.

1946. On weakened quantification, *J. Symbolic Logic*, **11**, 119—121.

1950. Espace de Hilbert et intuitionnisme, Les mèthodes formelles en axiomatique. Colloques interationaux du C. N. R. S., Paris, 1953, 59—63.

1951. Note on the Riesz—Fischer theorem, *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A*, **54**, 35—40; *Indagationes math.*, **13**, 35—40.

1952. Logique et intuitionnisme, Actes du 2e collique intern. de logique math., Paris, 1954, 75—82.

1953. Sur la théorie intuitionniste de la mesure, *Bull. Soc. math. Belg.*, **6**, 70—78.

1955. Les fondaments des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la dèmonstration, Paris — Louvain, 1955.

Гилмор (Gilmore P.).

1953. The effect of Griss'criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalised within the intuitionistic logic, *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A*, **56**, 162—187; *Indagationes math.*, **15**, 162—187.

Гильберт (Hilbert D.)

1922. Neubegründung der Mathematik, Abhandl. mat. Seminar Hamburg Univers., **1**, 157—177.

Гильберт и Аккерман (Hilbert D., Akkermann W.)

1949. Grundzüge der theoretischen Logik, 3 Aufl. Berlin — Göttingen—Heidelberg, 1949. [Русский перевод 2-го издания: Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, М., 1947.]

Гливенко В. И.

1928. Sur la logique de M. Brouwer, *Bull. Acad. Sci. Belg.* (1928), 225—228.

1929. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, *Bull. Akad. Sci. Belg.* (1929), 183—188.

Грисс (Griss G. F. C.)

1944. Negatieloze intuitionistische wiskunde, *Verslagen Akad. Amsterdam*, 53, 261—268.

1946. Idealistische Filosofie. Een humanistische levensen wereldbeschouwing, Arnhem, 1946.

1946A. Negationless intuitionstic mathematics, I, *Proc. Akad· Amsterdam*, **49**, 1127—1133; *Indagationes math.*, **8**, 675—681.

1948. Over de negatie. *Feestbundel, aangeboden aan H. J. Pos, Amsterdam*, 1948.

1948A. Mathematiques, mystique et philosophie, Mélanges philosophiques. Bibliothèque du X Congrès intern. de philosophie, Amsterdam.

1949. Logique des mathèmatiques intuitionnistes sans négations, *Comptes rendus Akad. Sci. Paris*, **227**, 946—947.

1950. Negationless intuitionistic mathematics, II, *Proc. Akad. Amsterdam*, **53**, 456—463; *Indagationes math.*, **12**, 108—115.

1950A. The logic of negationless intuitionistic mathematics, *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A*, **54**, 41—49; *Indagationes math.*, **13**, 41—49.

1951. Negationless intuitionistic mathematics, III, IV, *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A*, **54**, 193—200, 452—471; *Indagationes math.*, **13**, 193—200, 452—471.

1955. La mathématique intuitioniste sans négation, *Nieuw Archief voor wiskunde*, **3**, 134—142.

Данциг ван (van Dantzig D.)

1942. On the affirmative content of Peano's theorem on differential equations, *Proc. Akad. Amsterdam.*, **45**, 367—373; *Indagationes math.*, **4**, 140—146.

1942A. A remark and a problem concerning the intuitionistic form of Cantor's intersection theorem, *Proc. Akad. Amsterdam*, **45**, 374—375; *Indagationes math.*, **4**, 147—148.

1947. On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics *Proc. Akad. Amsterdam*, **50**, 918—929, 1092—1103; *Indagationes math.*, **9**, 429—440, 506—517.

1949. Comments on Brouwer's theorem on essentially-negative predicates, *Proc. Akad. Amsterdam*, **52**, 949—957; *Indagationes math.*, **11**, 347—355.

Дейкман (Dijkman J. G.)

1948. Recherche de la convergence négative dans les mathèmatiques intuitionnistes, *Proc. Akad. Amsterdam*, **51**, 681—692; *Indagationes math.*, **10**, 232—243.

1952. Convergentie en divergentie in de intuitionistische wiskunde, Thesis, Amsterdam, 1952.

Детуш (Destouches J.-L.)

1951. Sur la mécanique classique et l'intuitionnisme, *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A*, **54**, 74—79; *Indagationes math.*, **13**, 74—79.

Дубислав (Dubislav W.)

1932. Die Philosophie der Mathématik in der Gegenwart, Berlin, 1932.

Дьедонне (Dieudonné J.)

1949. L'axiomatique dans les mathématiques modernes, Congrès intern. de philosophie des sciences, Paris,1949 (Actualités scientifiques et industrielles, 1137, Paris, 1951).

Иогансон (Johanssohn I.)

1936. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, *Compositio math.*, 4, 119—136.

Ионг де (de Jongh I. I.)

1948. Restricted forms of intuitionistic mathematics, Proc. X intern. congress philosophy, Amsterdam, 1948, 744—748.

Карнап (Carnap R.)

1934. Logische Syntax der Sprache, Wien, 1934.

1937. The logical syntax of language, London, 1937.

Карри (Curry H. B.)

1951. Outlines of a formalist phylosophy of mathematics, Amsterdam, 1951.

Клини (Kleene S. C.)

1952. Introduction to metamathematics, Amsterdam — Groningen — New York, 1952 [Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, М., 1957.]

Колмогоров А. Н.

1932. Zur Deutung der intuitionistischen Logik, *Math. Zeitschrift*, 35, 58—65.

Корпут ван дер (van der Corput J. G.)

1946. On the fundamental theorem of algebra, *Proc. Akad. Amsterdam*, 49, 722—732, 878—886, 985—994; *Indagationes math.*, 8, 430—440, 549—557, 605—614.

Курода (Kuroda S.)

1951. Intuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik, *Nagoya math. J.*, 2, 35—47.

Л о о р д е (d e L o o r B.)

1925. Die hoofstelling van die algebra van intuisionistiese standpunt, Thesis, Amsterdam, 1925.

М а н н у р и (M a n n o u r y G.)

1947. Les fondsments psycholinguistiques des mathèmatiques, Neuchatel, 1947.

М е н г е р (M e n g e r K.)

1930. Der Intuitionismus, *Blätter deutsch. Philosophie*, 4, 311—325.

Н е й м а н ф о н (v o n N e u m a n n J.)

1929. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Annalen*, 102, 49—131.

Р о б и н с о н (R o b i n s o n A.)

1951. On the metamathematics of algebra, Amsterdam, 1951.

Р о о т с е л а р в а н (v a n R o o t s e l a a r B.)

1952. Un problème de M. Dijkman, *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A.*, 5, 405—407; *Indagationes math.*, 14, 405—407.

1954. Generalization of the Brouwer integral, Thesis, Amsterdam, 1954.

1955. On the mapping of spreads. *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A*, 58, 557—563; *Indagationes math.*, 17, 557—563.

1955 A. Generating schemes for full mappings, *Proc. Akad. Amsterdam, Ser. A*, 58, 646—649; *Indagationes math.*, 17, 646—649.

С т о у н (S t o n e M. H.)

1932. Linear transformations in Hilbert space, New York, 1932.

Т а р с к и й (T a r s k i A.)

1950. Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, Proc. intern. Congress. Math. 1950, Cambridge, Mass., 705—720.

Ф р е й д е н т а л ь (F r e u d e n t h a l H.)

1936. Zum intuitionistische Raumbegriff, *Compositio math.*, 4, 82—111.

Х е н к и н (H e n k i n L.)

1953. Some interconnections between modern algebra and mathematical logic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74, 410—427.

РЕКОМЕНДАЦИИ ЧИТАТЕЛЯМ

Теория множеств: Брауэр, 1924, 1925A, 1926, 1942, 1942A.

Топология: Брауэр, 1925B, 1926C, 1952A, 1952B, 1954A; Фрейденталь, 1936.

Функции действительной переменной: Брауэр, 1923, 1926A; ван Данциг, 1942; ван Роотселар, 1954.

Функции комплексной переменной: Белинфанте, 1941.

Алгебра: Гейтинг, 1927, 1941.

Основная теорема алгебры: Брауэр и де Лоор, 1924; де Лоор, 1925; Брауэр, 1924C; Вейль, 1924; ван дер Корпут, 1946.

КОММЕНТАРИИ

1. (К стр. 9.) «Ф о р м», «И н т», «П р а г м» и «С и г н» (в подлиннике «S i g n») означают «формалист», «интуиционист», «прагматист» и «сигнифицист». «К л а с с» есть представитель «классической» математики. Редакция затрудняется объяснить смысл имени «Б у к в» (в подлиннике «Letter»). В дальнейших наших комментариях часто выступает еще один участник спора «К о н» — представитель конструктивного направления в математике.

2. (К стр. 9.) Кон. Здравствуйте, дорогие коллеги! Слышу, что господин Инт излагает здесь свое credo. Он совершенно прав в том, что математические построения требуют особой логики. Однако я не могу согласиться с тем, что математика *с самого начала* имеет дело с «бесконечным». «Бесконечное» вводится в математику через абстракции. Применяются абстракция потенциальной осуществимости и абстракция актуальной бесконечности. Суть последней мне не ясна, а первая состоит в отвлечении от практических границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью имеющихся в нашем распоряжении пространства, времени и материалов. *Умственные* построения, о которых говорил сейчас господин Инт, потенциально осуществимы. В качестве прообразов они имеют практически осуществимые материальные построения. Рассмотрение потенциально осуществимых построений требует особой логики — *конструктивной математической логики*.

3. (К стр. 11.) К о н. Моя точка зрения на формулировку II чуть-чуть отличается от точки зрения господина И н т а. По-моему, вовсе не для всякого определения должен обязательно иметься объект, подпадающий под это определение. Иногда построение такого объекта может составлять проблему, и, пока эта проблема не будет решена, мы не вправе будем утверждать, что такой объект существует. Именно такой проблемный характер имеет определение II числа l. В настоящее время не указано, т. е. не построено число l, характеризуемое этим определением. Ука-

зано оно будет лишь тогда, когда будет решена проблема близнецов, и лишь тогда мы вправе будем сказать, что число l существует.

Что касается до «вечности» математических истин, то полагаю, что этот вопрос не только «метафизический», но и праздный. А существование в математике — это потенциальная осуществимость построения.

4. (К стр. 20.) К о н. Мне кажется, что господин И н т несколько недооценивает свой интуиционизм. Прежде всего, разве можно так отделять «гуманитарные» науки от наук «естественных»? Разве человек с его «умственными построениями» не есть часть природы? Ведь умственные построения, такие, например, как построения все бо́льших и бо́льших натуральных чисел, обычно являются сл[illegible]ками с построений материальных, осуществляемых в окружающей нас действительности. Материальными прообразами таких построений являются построения все больших и больших домов, все более сложных машин и т. п. С другой стороны, умственные построения оказываются часто проектами построений материальных. Сложнейшие алгорифмы осуществляются сначала как умственные построения, а потом в наш век кибернетики воплощаются в работе электронных машин, похожих во многих отношениях на мозг человека. Таким образом, исследование умственных построений отнюдь не является делом, интересующим одни только гуманитарные науки.

Хочу еще сказать, что я не принадлежу к тому «большинству математиков», о котором говорил господин Ф о р м и для которого ценность интуиционистской математики «роковым образом» (как страшно!) подрывается тем обстоятельством, что интуиционизм уничтожает «наиболее драгоценные» математические результаты, которые надлежит «спасать». Что спасать и почему спасать? По-видимому, над какими-то «драгоценными результатами» нависла опасность. Того и гляди выяснится, что они лишены содержания и что все попытки их разумного истолкования обречены на неуспех. Но тогда что же в них драгоценного и «жизненно важного»? И уже совсем странной кажется мне идея господина Ф о р м а о «несколько более либеральной концепции конструктивного», специально выдумываемой для их спасения. Впрочем, пусть он себе выдумывает эту концепцию. На то он и Ф о р м.

5. (К стр. 24.) К о н. Меня очень радуют эти ваши слова.

6. (К стр. 24.) К о н. По существу мы теперь приходим к понятию натурального числа, принятому в конструктивной математике: натуральное число — это слово в алфавите |, т. е. ряд вертикальных штрихов [А. А. Марков, 1954]. Различие только в том, что у нас палочки, а у вас точки.

7. (К стр. 26.) К о н. Мне непонятно, какие объекты вы называете «последовательностями рациональных чисел». Подозреваю, что вы имеете в виду нечто совсем неконструктивное вроде тех актуально бесконечных «объектов», о которых любит говорить господин К л а с с. Если это так, то наши пути здесь расходятся, так как я считаю возможным разговаривать лишь о конструктивных объектах. Когда я говорю о последовательности рациональных чисел, то подразумеваю под этим алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в некоторое рациональное число [М а р к о в, 1962]. Такие алгорифмы являются конструктивными объектами, что дает возможность рассматривать конструктивные функции действительной переменной как алгорифмы, перерабатывающие конструктивные действительные числа в конструктивные действительные числа.

8. (К стр. 26.) Здесь допущена неточность. При условии что $n(k)$ не убывает с ростом k, действительно можно положить $b_k = a_{n(k)}$. Вообще же можно положить

$$m(k) = \max(n(1),\ n(2),\ \ldots,\ n(2k)),\ b_k = a_{m(k)}.$$

В самом деле, тогда $m(k)$ не убывает с ростом k, и мы имеем при всяких k, p и q:

$$|a_{m(k)+q} - a_{m(k)}| \leqslant |a_{m(k)+q} - a_{n(2k)}| + |a_{m(k)} - a_{n(2k)}| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k},$$

$$|a_{m(k)+q} - a_{m(k)}| < \frac{1}{k},$$

$$|b_{k+p} - b_k| = |a_{m(k+p)} - a_{m(k)}| < \frac{1}{k}.$$

9. (К стр. 29.) К о н. Ваши примеры очень милы и остроумны. Каждый из них основан на некоторой в настоящее время нерешенной проблеме. Вы, очевидно, убеждены в том, что, как только используемая вами проблема будет так или иначе решена (что вполне может случиться), вы тут же изобретете другой пример того же рода, основанный на другой нерешенной проблеме.

Давайте, однако, немножко пофантазируем. Представим себе, что некий гениальный математик изобрел единый общий метод («алгорифм»), позволяющий решить любую единичную математическую задачу, т. е. дать правильный ответ «да» или «нет» на любой математический вопрос, требующий такого ответа. Ведь тогда вы не смогли бы построить *ни одного* нужного вам примера и вам, по-видимому, ничего не оставалось бы, как во всем соглашаться с господином К л а с с о м. А вы, по-видимому, считаете себя застрахованным от этой мрачной перспективы. Конечно, вы

знаете, что Чёрч доказал неразрешимость проблемы разрешения [Чёрч, 1936] и что в настоящее время доказана неразрешимость ряда куда более скромных «массовых» математических проблем. Но ведь все эти результаты основаны на том или ином уточнении понятия алгорифма («единого общего метода»), например на понятии рекурсивной функции, и на предположении об адекватности этого уточнения, например на тезисе Чёрча, утверждающем, что «рекурсивность» равносильна «вычислимости». Ясно, что без копания в понятии алгорифма никакое доказательство невозможности разрешающего алгорифма не пройдет. Если вы не хотите признать тезис Чёрча или что-нибудь в этом роде, то вы вынуждены будете согласиться с тем, что все ваши расхождения с господином Классом зависят от состояния наших знаний в настоящий момент. Все ваши антиклассические высказывания придется тогда рассматривать как истины «de facto», а не «de jure». Устраивает ли это вас?

С другой стороны, если бы вы признали тезис Чёрча и современную теорию алгорифмов, то это, по-видимому, означало бы существенную перестройку вашего математического мировоззрения, переход от интуиционизма к конструктивному пониманию математики.

10. (К стр. 29.) Кон. По-моему, это отнюдь не «достаточно ясно». Ведь может оказаться, что всякое доказательство невозможности равенства $a = b$ будет давать искомые n и k. Впрочем, вы ведь собираетесь впоследствии привести более веские доводы. Поэтому отложим этот спор.

11. (К стр. 31.) Условие $a \# 0$ достаточно, но не необходимо для ограниченности последовательности, определяющей a^{-1}, как показывает пример последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = 0$ при всяком n.

12. (К стр. 42.) Кон. В настоящее время никто действительно не знает, чему равен предел построенной вами последовательности. Можно, однако, привести к противоречию предположение о том, что такого предела не существует. В самом деле, в этом случае 2 не является пределом данной последовательности. Отсюда следует, что в десятичном разложении π не встречается ряд цифр 0123456789. Но тогда $a_n = 1-2^{-n}$ при всяком n и 1 есть предел нашей последовательности вопреки предположению. Это рассуждение, очевидно, приводит к противоречию и более слабое предположение о том, что ни 1, ни 2 не являются пределами рассматриваемой последовательности. Конечно, все это отнюдь не значит, что мы доказали существование предела этой последовательности. Для этого нам следовало бы указать способ вычисления такого предела с любой точностью, чего мы *в настоящее время* не умеем делать.

Иначе обстоит дело с ограниченными монотонными последовательностями в конструктивном анализе, основанном на понятии конструктивного действительного числа. Здесь удалось построить возрастающую

ограниченную последовательность рациональных чисел, не сходящуюся ни к какому пределу [Шпекер, 1949]. Этот результат не зависит от того, что мы умеем делать и что мы знаем в настоящее время.

13. (К стр. 43.) Кон. Странно слышать, что с понятием «произвольного закона», дающего «полное предписание для вычисления n-го члена последовательности», т. е., по существу, с понятием алгорифма, перерабатывающего натуральные числа в рациональные, нельзя иметь дело. Современная теория алгорифмов не боится иметь дело с этим понятием. Эта теория не основана ни на какой особой «формальной системе», а лишь на том или ином уточнении понятия алгорифма. Таких уточнений было предложено несколько, но все они оказались, по существу, равносильными.

Что же касается соответствия нашему интуитивному представлению о континууме, то это представление столь смутно, что едва ли можно всерьез спорить о том, какая теория более ему соответствует. Мне представляются куда более существенными, с одной стороны, конструктивность теории, т. е. возможность ее построения без привлечения абстракции актуальной бесконечности, с другой — пригодность теории для обслуживания естествознания и техники.

14. (К стр. 44.) Кон. Никак не могу считать это понятие ясным. Прежде всего словосочетание «бесконечно продолжающаяся последовательность» само по себе ровно ничего не выражает. Для того чтобы оно начало что-то выражать, надо так или иначе разъяснить его смысл. Вы говорите, что это «последовательность, которая может быть продолжена до бесконечности». Но раз только «может быть продолжена», то это, по-видимому, просто конечная последовательность. Ведь как будто всякая конечная последовательность может быть продолжена как угодно далеко (а это, наверно, и значит «до бесконечности»). Таким образом, неясность остается и после вашего пояснения. Я подозреваю, что вам самим понятие БПП не кажется таким уж ясным [Гейтинг, 1955].

Впрочем, господин Класс, вероятно, по-своему «понимает», что такое БПП. Он скажет нам, что это — произвольное множество упорядоченных пар, удовлетворяющее следующим условиям.

1. Первый член всякой пары, принадлежащей рассматриваемому множеству, есть натуральное число.

2. Для всякого натурального числа n в множестве имеется единственная пара с первым членом n.

Под n-й компонентой БПП a господин Класс будет понимать второй член принадлежащей a паре с первым членом n.

Я тоже хочу по-своему истолковать понятие БПП. Вопреки вашим замечаниям о «свободном выборе» и «метании жребия» я предлагаю по-

нимать под БПП алгорифм, применимый ко всякому натуральному числу. n-й компонентой БПП $\mathfrak{A}$ я предлагаю называть тот объект, в который алгорифм $\mathfrak{A}$ перерабатывает n.

Не могу не пожалеть того человека, которого вы собираетесь заставлять делать столько «свободных выборов» или «метаний жребия». Мое понимание БПП гуманнее, так как алгорифм может выполняться по мере надобности машиной. А главное — мое понимание конструктивно. Ведь понятие алгорифма может быть стандартизовано, что дает возможность кодирования алгорифмов, записи их посредством «слов» в фиксированном алфавите. Алгорифмы тем самым становятся конструктивными объектами. К ним можно применять другие алгорифмы, что имеет большое значение в конструктивном анализе.

Ваши же БПП не суть конструктивные объекты, и я не умею с ними обращаться.

15. (К стр. 47.) Кон. Предлагаю следующие конструктивные варианты только что данных определений.

Определение 1. *Законом потока* называется алгорифм $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий следующим условиям.

(1) $\mathfrak{A}$ применим ко всякому натуральному числу.

(2) Если $\mathfrak{A}$ аннулирует (т. е. перерабатывает в пустое слово) какую-нибудь последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$, то $\mathfrak{A}$ аннулирует и ее предшественницу $a_1, \ldots, a_n$.

(3) Если $\mathfrak{A}$ аннулирует последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$, то $\mathfrak{A}$ применим ко всякой ее преемнице $a_1, \ldots, a_n, k$.

(4) Если $\mathfrak{A}$ аннулирует последовательность натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$, то можно найти хотя бы одно натуральное число k, такое, что $\mathfrak{A}$ аннулирует последовательность $a_1, \ldots, a_n, k$.

Определение 1′. Последовательности натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$, аннулируемые законом потока $\mathfrak{A}$, называются *допустимыми последовательностями закона потока* $\mathfrak{A}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — закон потока. *Законом, дополнительным к* $\mathfrak{A}$, называется алгорифм, применимый ко всякой допустимой последовательности этого закона потока.

Определение 2′. *Потоком* называется пара алгорифмов, первый из которых есть некоторый закон потока, а второй — некоторый дополнительный к нему закон.

Определение 3. Алгорифм $\mathfrak{C}$ *допустим по закону потока* $\mathfrak{A}$ если он применим ко всякому натуральному числу, и при любом n последовательность $\mathfrak{C}(1), \ldots, \mathfrak{C}(n)$ есть допустимая последовательность $\mathfrak{A}$.

Определение 3'. Если пара $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ есть поток и алгорифм $\mathfrak{C}$ допустим по $\mathfrak{A}$, то алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число n в $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}(1), \ldots, \mathfrak{C}(n))$, есть *элемент потока* $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$.

Определение 4. Элементы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ двух потоков *равны*, если $\mathfrak{D}(n) = \mathfrak{E}(n)$ при всяком натуральном n.

Определение 5. Два потока *равны*, если любой элемент одного из них есть элемент другого.

16. (К стр. 54.) Для тех n, для которых $d_n > c_n$, мы могли бы заменить d_n в ЧГ $\{d_n 2^{-n}\}$ на c_n, достигая этим соблюдения условия $d_n \leqslant c_n$. В самом деле, для таких n имеем: $d > c_n 2^{-n} - \frac{5}{8} 2^{-n}$, так как $d > d_n 2^{-n} - \frac{5}{8} 2^{-n}$; $d < c_n 2^{-n} + \frac{5}{8} 2^{-n}$, так как $d \not> c$ и $c < c_n 2^{-n} + \frac{5}{8} 2^{-n}$; следовательно, $|d - c_n 2^{-n}| < \frac{5}{8} 2^{-n}$.

17. (К стр. 54.) Поток S строится следующим образом. Закон потока Λ_s выделяет в качестве допустимых те последовательности целых чисел $x_1, \ldots, x_k$, которые удовлетворяют условиям (1) при $1 \leqslant n \leqslant k$ и условиям каноничности 3.3.3 (2) при $1 \leqslant n < k$. Дополнительный закон Γ_s сопоставляет каждой допустимой последовательности $x_1, \ldots, x_k$ рациональное число $x_k 2^{-k}$. Мы здесь несколько отошли от первоначального определения потока, согласно которому закон потока должен иметь дело с последовательностями *натуральных* чисел. Это обобщение, очевидно, не является существенным, поскольку с помощью нумерации целых чисел рассмотрение таких более общих потоков естественным образом сводится к рассмотрению потоков в первоначальном смысле.

18. (К стр. 54.) Это усматривается следующим образом.

Выбор x_{n+1} ограничен лишь условием 3.3.3(2) и условием

$$d_{n+1} \leqslant x_{n+1} \leqslant c_{n+1}.$$

Первое может быть переписано в виде

$$(*) \qquad 2x_n - 1 \leqslant x_{n+1} \leqslant 2x_n + 1.$$

Таким образом, целое число x_{n+1} должно лишь быть таким, что

$$\max(d_{n+1}, 2x_n - 1) \leqslant x_{n+1} \leqslant \min(c_{n+1}, 2x_n + 1).$$

Ввиду того что эти границы для x_{n+1} суть целые числа, для возможности выбора x_{n+1} достаточно, чтобы соблюдалось неравенство

$$(**) \qquad \max(d_{n+1}, 2x_n - 1) \leqslant \min(c_{n+1}, 2x_n + 1).$$

Это неравенство соблюдается. В самом деле, мы уже позаботились о соблюдении условия $d_{n+1} \leqslant c_{n+1}$. Ввиду каноничности ЧГ $\{d_n 2^{-n}\}$, имеем

$$d_{n+1} \leqslant 2d_n + 1,$$

что следует из 3.3.3 (2), написанного для этого ЧГ. С другой стороны, при выборе x_n было соблюдено условие $d_n \leqslant x_n$. Следовательно, $d_{n+1} \leqslant 2x_n + 1$. Аналогично усматриваем, что $2x_n - 1 \leqslant c_{n+1}$. Наконец, имеем $2x_n - 1 \leqslant 2x_n + 1$. Таким образом, неравенство (**) соблюдено. Следовательно, имеется хотя бы одно допустимое значение для x_{n+1}. Что таких значений имеется не более трех, видно из условия (*).

19. (К стр. 58.) К о н. По-моему, все дело в том, как ссылаться на возможные способы установления «данных теоремы». Для того чтобы такая ссылка была убедительной, надо произвести глубокий анализ наших логических средств, показывающий, что действительно иных способов, кроме принятых во внимание $\mathscr{F}$-выводов и ζ-выводов, у нас нет. Ничего такого вами не сделано. Да и возможно ли это вообще при рассуждениях о столь туманных материях, как БПП в вашем понимании этого термина? Ввиду этого все ваше доказательство теоремы о веерах кажется мне совершенно неубедительным и легковесным. Немудрено, что оно понравилось господину К л а с с у.

Естественно возникает вопрос, как обстоит дело с теоремой о веерах при конструктивном понимании потоков и БПП, изложенном мною перед этим (см. примечания 13 и 14). На этот вопрос можно дать совершенно определенный ответ. При таком понимании эту «теорему» можно опровергнуть на примере. Мы воспользуемся при изложении этого примера некоторыми результатами И. Д. Заславского [Заславский, 1962].

В цитированной работе он определяет понятие *регулярной последовательности* («кортежа») чисел 0 и 1 (речь пока идет о конечных последовательностях). Это делается так, что имеют место следующие леммы.

Л е м м а 1. Имеется алгорифм, распознающий регулярность последовательности, т. е. применимый ко всякой последовательности целых неотрицательных чисел и аннулирующий ее тогда и только тогда, когда она есть регулярная последовательность (нулей и единиц).

Л е м м а 2. Для любого натурального числа n может быть указана n-членная регулярная последовательность.

Л е м м а 3. Предшественница $a_1, \ldots, a_n$ всякой регулярной последовательности $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ регулярна.

Л е м м а 4. Каков бы ни был алгорифм $\mathfrak{X}$, перерабатывающий всякое натуральное число в натуральное число, можно указать такое натуральное число m, что последовательность

$$\mathfrak{X}(1), \ldots, \mathfrak{X}(m)$$

не будет регулярной.

Построим теперь алгорифм $\mathfrak{A}$ таким образом, чтобы он был применим ко всякой последовательности натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и чтобы он аннулировал такую последовательность тогда и только тогда, когда имеется натуральное число $p \leqslant n$, такое, что последовательность $a_1, \ldots, a_p$ регулярна и что $a_i = 2$ при $p < i \leqslant n$. Иными словами, $\mathfrak{A}$ должен среди конечных последовательностей целых неотрицательных чисел распознавать последовательности, получаемые из регулярных приписыванием справа двоек (число которых может, в частности, равняться нулю). Нетрудно видеть, что такой алгорифм может быть построен.

Алгорифм $\mathfrak{A}$, очевидно, удовлетворяет условиям (1), (3) и (4) определения закона потока. В силу леммы 3 он удовлетворяет и условию (2) этого определения. Таким образом, $\mathfrak{A}$ есть закон потока.

Пусть $\mathfrak{B}$ есть алгорифм, перерабатывающий всякую последовательность неотрицательных целых чисел в последний член этой последовательности.

$\mathfrak{B}$ является законом, дополнительным к $\mathfrak{A}$. Пара алгорифмов $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$ является потоком и, очевидно, веером. Согласно определению элементов потока 3′, всякий элемент потока $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$ допустим по $\mathfrak{A}$, и, обратно, всякий алгорифм, допустимый по $\mathfrak{A}$, есть элемент потока $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$.

Рассмотрим произвольный элемент $\mathfrak{X}$ потока $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$. Он допустим по $\mathfrak{A}$, т. е. является алгорифмом, применимым ко всякому натуральному числу и таким, что при всяком натуральном m последовательность

$$(*) \qquad \mathfrak{X}(1), \ldots, \mathfrak{X}(m)$$

аннулируется алгорифмом $\mathfrak{A}$, т. е. получается из регулярной последовательности приписыванием справа двоек (число которых может равняться нулю). Число m может быть здесь выбрано согласно лемме 4 таким образом, что последовательность (*) не будет регулярной. Тогда эта последовательность будет содержать двойки. Мы видим, таким образом, что для всякого элемента $\mathfrak{X}$ потока $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$ может быть указано натуральное число i, такое, что $\mathfrak{X}(i) = 2$. Тем самым на этом потоке определяется целочисленная функция φ, такая, что ее значением для элемента $\mathfrak{X}$ потока $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$ является наименьшее натуральное число i, такое, что $\mathfrak{X}(i) = 2$.

Возьмем теперь произвольное натуральное число N. Согласно лемме 2, может быть указана регулярная последовательность

$$a_1, \ldots, a_N, a_{N+1}.$$

Построим алгорифмы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таким образом, что

$$\mathfrak{X}(i) = \begin{cases} a_i & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant N, \\ 2 & \text{при } N < i; \end{cases}$$

$$\mathfrak{Y}(i) = \begin{cases} a_i & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant N+1, \\ 2 & \text{при } N+1 < i. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ суть элементы потока $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$. Имеем

(**) $$\mathfrak{X}(i) = \mathfrak{Y}(i) \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant N$$

и вместе с тем $\varphi(\mathfrak{X}) = N + 1$, тогда как $\varphi(\mathfrak{Y}) = N + 2$. Таким образом, при любом натуральном N могут быть указаны такие элементы потока $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, что будут соблюдены условия (**), тогда как $\varphi(\mathfrak{X}) \neq \varphi(\mathfrak{Y})$. Это противоречит конструктивно понятой теореме о веерах.

Заметьте, что функция от алгорифма φ определена законно, т. е. так, что ее можно рассматривать как функцию от БПП: для двух алгорифмов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, таких, что $\mathfrak{X}(i) = \mathfrak{Y}(i)$ при всяком i значения функции φ совпадают.

20. (К стр. 59.) В самом деле, пусть $|x_1 - x_2| < 2^{-N-3}$. Положим $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Построим для x каноническую последовательность $\{\xi^{(m)}2^{-m}\}$, такую, что $|x - \xi^{(m)}2^{-m}| < \frac{9}{16}2^{-m}$ при всяком m. (См. замечание в конце 3.3.3.) Имеем

$$|x - x_i| < 2^{-N-4} \quad (i = 1, 2)$$

и потому при $m \leqslant N$ имеем

$$|x_i - \xi^{(m)}2^{-m}| < \frac{9}{16}2^{-m} + 2^{-m-4} \leqslant \frac{5}{8}2^{-m}.$$

Поэтому при построении канонических последовательностей $\{\xi_1^{(m)}2^{-m}\}$ и $\{\xi_2^{(m)}2^{-m}\}$ для чисел x_1 и x_2 можно положить $\xi_1^{(m)} = \xi_2^{(m)} = \xi^{(m)}$ $(m \leqslant N)$.

21. (К стр. 59.) Кон. В конструктивном анализе предложение, совпадающее по формулировке с теоремой 1, опровергается на примере. Более того, И. Д. Заславским построена конструктивная функция действительной переменной, определенная на замкнутом интерва-

ле [0, 1], которая не только не является равномерно непрерывной но даже не ограничена [Заславский, 1962]. Однако в конструктивном анализе доказана непрерывность всякой конструктивной функции действительной переменной в каждой точке, где она определена [Марков, 1958; Цейтин, 1962].

22. (К стр. 59.) К о н. Такая теорема имеет место и в конструктивном анализе [А. А. Марков, 1954].

23. (К стр. 59.) Пользуясь тем, что функция f даже равномерно непрерывна, можно следующим образом доказать, что она постоянна. Возьмем $\delta > 0$ так, чтобы неравенство $| f(x) - f(y) | < 1$ соблюдалось для любых двух точек рассматриваемого интервала, таких, что $| x - y | < \delta$. Так как f принимает лишь значения 0 и 1, будем иметь $f(x) = f(y)$, коль скоро $| x - y | < \delta$. Фиксируем точку x_0 рассматриваемого интервала. Для любой точки x этого интервала строим ряд точек $x_1, \ldots, x_n$, такой, что $| x_i - x_{i-1} | < \delta$ $(0 < i \leqslant n)$ и что $x_n = x$. Имеем $f(x_i) = f(x_{i-1})$ $(0 < i \leqslant n)$, откуда $f(x) = f(x_0)$.

24. (К стр. 59.) К о н. Так звучащее предложение опровергается на примере в конструктивном анализе [Заславский, 1962].

25. (К стр. 59.) z_n является n-й компонентой канонической последовательности для одного из значений функции f. Обозначим через y_{n+1} $(n + 1)$-ю компоненту этой последовательности. z_{n+1} является $(n + 1)$-й компонентой канонической последовательности для одного из значений функции f. Обозначим через y_n n-ю компоненту этой последовательности. Имеем

$$| z_n - y_{n+1} | < 2^{-n-1},$$
$$| y_n - z_{n+1} | < 2^{-n-1}.$$

Ввиду минимальности z_n и z_{n+1} имеем

$$z_n \leqslant y_n,$$
$$z_{n+1} \leqslant y_{n+1}.$$

Следовательно,

$$z_{n+1} - z_n \leqslant y_{n+1} - z_n < 2^{-n-1},$$
$$z_n - z_{n+1} \leqslant y_n - z_{n+1} < 2^{-n-1}$$

и потому $| z_n - z_{n+1} | < 2^{-n-1}$. Отсюда следует, далее, что $| z - z_n | < 2^{-n}$ при всяком n.

Пусть $\{u_n\}$ — одна из рассматриваемых канонических последовательностей для значений функции f. Ввиду минимальности z_n имеем

$z_n \leqslant u_n$ при всяком n и потому $z \leqslant u$. Таким образом, z — нижняя грань значений функции f.

С другой стороны, z_n является n-й компонентой канонической последовательности для некоторого значения y функции f. Поэтому $|z_n - y| < \frac{5}{8}2^{-n}$, и, следовательно, $|y - z| < \frac{13}{8}2^{-n}$. Таким образом, функция f принимает значения, сколь угодно близкие к z. Следовательно, z — наибольшая нижняя грань для $f(x)$.

26. (К стр. 59.) Кон. Так звучащее предложение опровергается на примерах в конструктивном анализе. Прежде всего у положительной (конструктивной) функции может вообще не быть наибольшей нижней грани [Заславский, 1962]. А затем даже если положительная функция равномерно непрерывна, то и тогда ее наибольшая нижняя грань может равняться нулю. Однако равномерно непрерывная конструктивная функция всегда имеет наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю грани (см. там же).

27. (К стр. 60.) Кон. О построенной вами функции f вы, однако, не можете утверждать, что она не достигает своей наименьшей нижней грани в промежутке $[-1,1]$. А вот в конструктивном анализе строится функция, равномерно непрерывная в этом промежутке и не достигающая в нем своей наименьшей нижней грани [Заславский, 1962].

28. (К стр. 61.) В конструктивном анализе предложения (A), (B) и (C) опровергаются на примере вида компонент шпекеровой последовательности [см. комментарий 12] рациональных чисел. Этот вид ограничен бесконечен и не имеет точки накопления, чего нельзя сказать о виде, приводимом в вашем примере.

29. (К стр. 61.) См. 3.3.3.

30. (К стр. 61.) Число a можно взять здесь как $x_{r+1} - 1$, где $x_{r+1}2^{-r-1}$ — $(r+1)$-я компонента канонической последовательности для x.

31. (К стр. 61.) Кон. В конструктивном анализе предложение, совпадающее по формулировке с теоремой 2, опровергается на примере следующим образом. Согласно И. Д. Заславскому [Заславский, 1962] строится система замкнутых промежутков $E_{i,j}$ $(i = 0, 1, 2,\ldots;$ $j = 1, \ldots, k_i)$ со следующими свойствами:

(1) $k_0 = 1$;
(2) $k_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$;
(3) $E_{0,1} = [0, 1]$;

4) каждый из промежутков $E_{i+1,j}$ ($j = 1, \ldots, k_{i+1}$) содержится внутри одного из промежутков $E_{i,h}$;

(5) промежутки $E_{i,j}$ и $E_{i,h}$, где $j \neq h$, не имеют общих точек;

(6) концы каждого промежутка $E_{i,j}$ суть рациональные числа;

(7) для всякого конструктивного действительного числа x могут быть указаны натуральное число i и рациональные числа a и b, такие, что $a < x < b$ и что промежуток $[a, b]$ не имеет общих точек ни с одним промежутком $E_{i,j}$ ($j = 1, \ldots, k_i$).

Пусть Q есть вид левых концов промежутков $E_{i,j}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 1, \ldots, k_i$).

В силу (2) и (4) Q бесконечен. В силу (1), (3) и (4) $Q \subseteq [0, 1]$ и, значит, Q ограничен.

Пусть x — конструктивное действительное число. Построим натуральное i и рациональные числа a и b, согласно (7), таким образом, что x будет лежать внутри промежутка $[a, b]$ и что этот промежуток не будет иметь общих точек ни с одним из промежутков $E_{i,j}$ ($j = 1, \ldots, k_i$). В силу (4) $[a, b]$ не имеет общих точек ни с одним из промежутков $E_{h,j}$ ($h \geqslant i$, $j = 1, \ldots, k_h$). Поэтому общими точками вида Q и промежутка $[a, b]$ могут быть лишь левые концы промежутков $E_{h,j}$, где $h < i$. Ввиду (6) все эти точки могут быть перечислены. Они образуют конечный список без повторений: $c_1, \ldots, c_m$. Положим

$$d = \min_{1 \leqslant r < s \leqslant m} |c_r - c_s|.$$

Пусть $\{x_n\}$ — каноническая последовательность для x. Тогда имеются натуральные числа k и p, такие, что $a + \frac{1}{k} < x_{p+q} < b - \frac{1}{k}$ при всяком натуральном q. Найдем натуральное число r таким образом, чтобы соблюдалось условие

$$2^{-r+1} < \min\left(d, \frac{1}{k}\right).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} |x_{p+r} - x| &< \frac{5}{8} 2^{-p-r} \\ &< 2^{-r}, \\ a &< x_{p+r} - \frac{1}{k} \\ &< x + 2^{-r} - \frac{1}{k} \\ &< x - 2^{-r}, \end{aligned}$$

$$x + 2^{-r} < x - 2^{-r} + \frac{1}{k}$$
$$< x_{p+r} + \frac{1}{k}$$
$$< b.$$

Таким образом, промежуток $[x - 2^{-r},\ x + 2^{-r}]$ содержится внутри промежутка $[a,\ b]$ и потому может иметь с видом Q разве лишь общие точки $c_1, \ldots, c_m$. Промежуток $[x - 2^{-r},\ x + 2^{-r}]$ имеет, однако, длину 2^{-r+1}, меньшую, чем d, и потому не может содержать более одной точки c_i.

Этим мы показали, что для всякого конструктивного действительного числа x может быть найдено такое натуральное число $r(x)$, что промежуток $[x - 2^{-r},\ x + 2^{-r}]$ не сможет содержать двух различных членов вида Q. Вместе с тем этот вид ограничен и бесконечен.

32. (К стр. 62.) *Обратным для элемента* a здесь называется такой элемент b, что $a + b = 0$.

33. (К стр. 63.) Здесь элементом, *обратным для элемента* a, называется такой элемент c, что $a \cdot c = 1$.

34. (К стр. 67.) К о н. В вашем примере мы в настоящее время не умеем указывать решение уравнения $ax + by = 0$, отделенное от нулевого. А я могу доказать, что невозможен алгорифм, указывающий для всякой пары конструктивных действительных чисел a и b решение этого уравнения, отделенное от нулевого. Этот факт я выражаю так: «неверно, что всякое уравнение $ax + by = 0$, где a и b — конструктивные действительные числа, имеет решение, отделенное от нулевого».

35. (К стр. 67.) Эта теорема не есть «частный случай» теор. 1 из 4.2.1, в которой число уравнений равно числу неизвестных. Однако теор. 1 из 4.2.4 легко выводится из теор. 1 из 4.2.1.

36. (К стр. 69.) Мы применяем здесь теор. 4 из 4.1.3.

37. (К стр. 69.) Здесь следует принять во внимание, что, как видно из определения векторов c_s, имеют место равенства $b_{si} = c_{si} (i = 1, \ldots r;\ s = 1, \ldots\ r+1)$.

38. (К стр. 72.) Здесь автор отождествляет упорядоченные пары последовательностей с последовательностями упорядоченных пар.

39. (К стр. 77.) Относительная граница подвида S вида E может быть определена как вид тех точек p вида E, для которых при всяком натуральном n могут быть указаны точки q_n и r_n, такие, что $|p-q_n|<2^{-n}$, $|p-r_n|<2^{-n}$ и что $q_n \in S$, а $r_n \in E-S$. В рассматриваемом случае элементарного домена V его относительная граница есть замыкание результата вычитания пересечения границ V и E из границы V.

40. (К стр. 77.) Это следует из того, что $|q-r| \geqslant d$, тогда как $|p-q|<\frac{1}{2}d$.

41. (К стр. 81.) Приведенное в тексте доказательство теоремы 1 не убедительно [переквалификация точки r в допустимый узел; отсутствие доказательства предложения (i)]. Мы предлагаем здесь некоторое дополнение к этому доказательству.

Докажем прежде всего, что среди любых различных пяти узлов $p_1, \ldots, p_5$ n-решетки найдутся два узла p_h и p_j, такие, что $|p_h-p_j| \geqslant 2^{-n+1}$. В самом деле, пусть $p_i=(a_i 2^{-n}, b_i 2^{-n})$, где a_i и b_i — целые числа. Невозможно, чтобы среди чисел $a_1, \ldots, a_5$ было не более двух различных и среди чисел $b_1, \ldots, b_5$ тоже было не более двух различных. Если бы это было так, то имелось бы не более четырех различных точек $(a_h 2^{-n}, b_j 2^{-n})$, а ведь пять различных точек p_i содержится среди точек $(a_h 2^{-n}, b_j 2^{-n})$. Если имеются три различных числа a_i, то пусть a_h означает наименьшее из a_i, a_j —наибольшее из a_i; если же имеется не более двух различных a_i, то пусть наименьшее из b_i, $б_j$ — наибольшее из b_i. Согласно только что доказанному, имеем $|a_h-a_j| \geqslant 2$ или $|b_h-b_j| \geqslant 2$. В обоих случаях имеем $|p_h-p_j| \geqslant 2^{-n+1}$, что и требовалось.

Проведем теперь для всякого натурального числа n конструктивную классификацию узлов n-решетки на допустимые и недопустимые, как в тексте: имеем $\rho(p, Q)<\frac{5}{8} 2^{-n}$, коль скоро узел p n-решетки допустим, и $\rho(p, Q)>2^{-n-1}$, коль скоро он недопустим. (В дальнейшем эта классификация изменяться не будет.) Покажем, что для всякой точки q вида Q и для всякого натурального n может быть указан допустимый узел p n-решетки, удовлетворяющий условию $|p-q|<\frac{5}{8} 2^{-n}$.

В самом деле, пусть $q=(q', q'') \in Q$, и пусть n — натуральное число. Пусть p' означает n-й член канонической последовательности для q', p'' — n-й член канонической последовательности для q''. Пусть $p_1=(p', p'')$. Имеем $|p'-q'|<\frac{5}{8} 2^{-n}$, $|p''-q''|<\frac{5}{8} 2^{-n}$ и для некоторых целых чисел a и b имеем $p'=a 2^{-n}$, $p''=b 2^{-n}$. Поэтому p_1

есть такой узел n-решетки, что $|p_1 - q| < \frac{5}{8} 2^{-n}$. Выясним, допустим ли этот узел, что возможно ввиду конструктивности нашей классификации узлов. Если p_1 допустим, то построение закончено. Пусть p_1 недопустим.

Тогда $\rho(p_1, q) > 2^{-n-1}$ и потому $|p_1 - q| > 2^{-n-1}$. Поэтому имеется рациональное число $\varepsilon > 0$, такое, что $|p_1 - q| > \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) 2^{-n}$ Мы можем теперь повторить построение предыдущего абзаца с заменой коэффициента $\frac{5}{8}$ на коэффициент $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$. Это дает нам такой узел p_2 n-решетки, что $|p_2 - q| < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) 2^{-n} < |p_1 - q|$. Если p_2 допустим, то наше построение закончено. В противном случае продолжаем его дальше аналогичным образом.

Процесс последовательного построения узлов p_i n-решетки, таких, что $|p_{i+1} - q| < |p_i - q| < \frac{5}{8} 2^{-n}$, должен, однако, закончиться не позже чем на четвертом шагу. В самом деле, если бы нам пришлось сделать и пятый шаг, то мы получили бы пять попарно различных узлов $p_1, \ldots, p_5$ n-решетки, таких, что $|p_i - q| < \frac{5}{8} 2^{-n}$. Для любых h и j мы имели бы $|p_h - p_j| < \frac{5}{4} 2^{-n}$, а с другой стороны, должны были бы иметься h и j, такие, что $|p_h - p_j| \geqslant 2^{-n+1}$.

Закончиться указанный процесс может, однако, лишь на таком допустимом узле p_k $(k \leqslant 4)$ n-решетки, что $|p_k - q| < \frac{5}{8} 2^{-n}$. Следовательно, может быть найден такой допустимый узел p n-решетки, что $p - q| < \frac{5}{8} 2^{-n}$.

Теперь легко осуществляется намеченное в начале авторского доказательства построение допустимого узла r $(n+1)$-решетки по данному допустимому узлу p n-решетки. При этом не требуется никаких переопределений допустимости, нарушающих ход доказательства.

В самом деле, пусть p — допустимый узел n-решетки. Имеем $\rho(p, Q) < \frac{5}{8} 2^{-n}$. Поэтому может быть найдена такая точка $q \in Q$, что $|p - q| < \frac{5}{8} 2^{-n}$. Для этой точки может быть, согласно доказанному, построен такой *допустимый узел* r $(n+1)$-решетки, что $|q - r| < \frac{5}{8} 2^{-n-1}$. Имеем $|p - r| < \frac{15}{16} 2^{-n} < 2^{-n}$.

Дальнейшее можно теперь провести, как в тексте. В частности, для доказательства предложения (i) надо лишь при всяком натураль-

ном n брать в качестве p_n такой допустимый узел n-решетки, что $|p - p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$.

42. (К стр. 81.) Из неравенств $|q - p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$ и $|r - p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$ отнюдь не следует, что p_n — допустимый узел n-решетки. Поэтому данный «королларий» и последующую лемму нельзя считать доказанными. Мы докажем их сейчас в несколько ослабленной формулировке, заменяя $-n-3$ в показателях на $-n-4$.

Королларий. Для любых точек q и r ограниченного замкнутого локализованного вида Q, таких, что $|q - r| < 2^{-n-4}$, можно найти такой допустимый узел p_n n-решетки, что $|q - p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$ и $|r - p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$.

В предыдущем комментарии мы указывали построение такого допустимого узла p n-решетки, что $|p - q| < \frac{5}{8} 2^{-n}$. Нетрудно, однако, видеть, что это построение дословно проходит с заменой коэффициента $\frac{5}{8}$ любым рациональным числом, большим чем $\frac{1}{2}$. Таким образом, может быть найден допустимый узел p_n n-решетки, такой, что $|q - p_n| < \frac{9}{16} 2^{-n}$. Так как $\frac{9}{16} 2^{-n} + 2^{-n-4} = \frac{5}{8} 2^{-n}$, то оба неравенства: $|q - p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$ и $|r - p_n| < \frac{5}{8} 2^{-n}$ будут при этом соблюдены.

Последующая лемма с заменой в ней $-n-3$ на $-n-4$ теперь непосредственно получается. В этой лемме S означает ТГ-веер, построенный, как указано в доказательстве теор. 1.

43. (К стр. 82.) Последнее рассуждение ничего не доказывает. Доказать предложение (ii) можно следующим образом.

Находим рациональную точку r из V_{n+2} таким образом, чтобы соблюдалось условие

$$|p - r| < \rho_{n+2} + 2^{-n-3},$$

что возможно по определению ρ_{n+2}. Точка r принадлежит одному из квадратов с длинами сторон $3 \cdot 2^{-n-2}$ и с центрами в $(n+2)$-х компонентах элементов потока S. Пусть p_{n+2} есть центр этого квадрата. Имеем $|r - p_{n+2}| \not> 3 \cdot 2^{-n-3}$ p_{n+2} есть $(n+2)$-я компонента некоторого ТГ q_n из S Имеем $|p_{n+2} - q_n| \not> 2^{-n-2}$ и по доказанному $q_n \in M$. При-

нимая во внимание, что $\rho_{n+2} \not> \rho_0$, получаем, наконец,

$$| p - q_n | \not> | p - r | + | r - p_{n+2} | + | p_{n+2} - q_n |,$$

$$| p - q_n | < \rho_0 + 2^{-n-3} + 3 \cdot 2^{-n-3} + 2^{-n-2} < \rho_0 + 2^{-n},$$

что и требовалось доказать.

44. (К стр. 83.) К о н. Предложения, совпадающие по формулировкам с теор. 3, 4 и 5, опровергаются в конструктивном анализе на примерах [Заславский, 1962].

45. (К стр. 84.) К о н. В конструктивном анализе «теорема Гейне—Бореля» опровергается на примере [Заславский, 1962].

46. (К стр. 86.) К о н. В конструктивном анализе предложение, совпадающее по формулировке с леммой 1, может быть опровергнуто на примере. Однако конструктивно доказуемо следующее видоизменение леммы 1.

Л е м м а 1′. Если элементарный домен W содержится в области $A = \{V_n\}$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} mV_n$, то $mW \not> \lim\limits_{n\to\infty} mV_n$. [Ср. Заславский и Цейтин, 1962.]

Этой леммы достаточно для доказательства теор. 1.

47. (К стр. 86.) К о н. Вот конструктивное доказательство теор. 1. Пусть $A = \{V_n\}$, $B = \{W_n\}$ и существуют $mA = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$ и $mB = \lim\limits_{n\to\infty} W_n$. Для данного k находим n, такое, что $mB - mW_n < 2^{-k}$; в силу леммы 1′ имеем $mW_n \not> mA$. Следовательно, $mB < mA + 2^{-k}u$; так как это верно для любого k, имеем $mB \not> mA$.

48. (К стр. 83.) К о н. Вторая часть вашей теор. 2 непосредственно следует из теор. 1, а с первой частью я согласиться не могу ввиду осуществимости так называемых сингулярных покрытий [Заславский и Цейтин, 1962]. Мне думается, однако, что определения меры и измеримости области следует несколько изменить, формулируя их так: область A *измерима*, если она совпадает с некоторой областью, определяемой последовательностью элементарных доменов $\{V_n\}$, для которой последовательность чисел $\{mV_n\}$ сходится; число μ есть *мера* области A, если имеется последовательность элементарных доменов $\{V_n\}$, определяющая область, совпадающую с A, и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} mV_n = \mu$. При таких определениях первая часть вашей теор. 2 станет тривиальной, а вторая сможет быть трактована как теорема единственности меры области.

49. (К стр. 88.) Последние соотношения не доказаны, и мы пока даже не знаем, что выражение $\rho(p, L)$ имеет смысл. Закончить доказательство можно следующим образом. Пусть p — произвольная точка. Так как $L \subseteq H_n$, то $\rho(p, H_n) \ngtr |p - q|$ для всякой точки q вида L. Так как всякий содержащийся в H_n $\varkappa_n$-квадрат имеет общую точку с L, то имеется точка q_n вида L, такая, что

$$(*) \qquad |p - q_n| \ngtr \rho(p, H_n) + 2^{-n}.$$

Для этой точки и для любого натурального числа k имеем $\rho(p, H_{n+k}) \ngtr |p - q_n|$, откуда $\rho(p, H_{n+k}) \ngtr \rho(p, H_n) + 2^{-n}$ для любых натуральных чисел n и k. С другой стороны, имеем, как нетрудно видеть, $H_{n+1} \subseteq H_n$ для любого натурального числа n. Следовательно $H_{n+k} \subseteq H_n$ и $\rho(p, H_n) \ngtr \rho(p, H_{n+k})$. Таким образом, $|\rho(p, H_n) - \rho(p, H_{n+k})| \ngtr 2^{-n}$ и последовательность чисел $\rho(p, H_n)$ сходится. Пусть $l = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(p, H_n)$. Переходя к пределу в соотношении $\rho(p, H_n) \ngtr |p - q|$ $(q \in L)$, получаем $l \ngtr |p - q|$ $(q \in L)$. Ввиду того что последовательность $\{\rho(p, H_n)\}$ неубывающая, имеем $\rho(p, H_n) \ngtr l$. Соотношение $(*)$ дает поэтому

$$|p - q_n| \ngtr l + 2^{-n},$$

где $q_n \in L$. Мы видим, что l есть наибольшая нижняя грань чисел $|p - q|$, где q пробегает L, т. е. что $l = \rho(p, L)$. Таким образом, $\rho(p, L)$ может быть вычислено для любой точки p, т. е. вид L локализован, что и требовалось доказать.

50. (К стр. 89.) Элементарные домены W_n мы определяем здесь следующим образом. $M = E - A$, где A есть область. Пусть A определяется последовательностью элементарных доменов $\{V_n\}$, где V_n при всяком n лежит внутри V_{n+1}. Полагаем $W_n = \alpha^* V_n$.

Согласно теор. 2 из 5.1.4, имеем $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n$. Нетрудно видеть, что при всяком n W_{n+1} лежит внутри W_n и что $\lim\limits_{n\to\infty} mW_n = mM$.

51. (К стр. 89.) Об измеримости N следует позаботиться при отрезании полосок.

52. (К стр. 89.) Под «обратным предложением» здесь понимается следующее предложение: «дополнение к почти полному виду есть пренебрежимый вид».

53. (К стр. 91.) Это определение интеграла непригодно, как показывает следующий пример.

Пусть $Q = E$ и функция f тождественно равна нулю в E. Пусть при всяком n имеем $l_n = 0$, $k_n = 2^{3n+3}$; пусть A_n есть внутренность квадрата с противоположными вершинами $(-2^{-n-1}, -2^{-n-1})$ и $(2^{-n-1}, 2^{-n-1})$; V_{n,k_n} есть квадрат с противоположными вершинами $(-2^{-n-2}, -2^{-n-2})$ и $(2^{-n-2}, 2^{-n-2})$; $V_{n,0} = \overline{E - V_{n,k_n}}$ и пусть $V_{n,h}$ есть пустой вид при $0 < h < k_n$. Нетрудно видеть, что условия (i), (ii) и (iii) выполнены. Вместе с тем имеем при всяком n

$$2^{-n-1} \sum_{h=-l_n}^{k_n} hmV_{nh} = 2^{-n-1}k_n 2^{-2n} = 1,$$

откуда, согласно определению интеграла (1),

$$\int_E 0\,dx = 1,$$

что не вяжется ни с какими нашими представлениями об интеграле. Кроме того, модифицируя в этом примере k_n, мы могли бы получить и

$$\int_E 0dx = N$$

при любом натуральном N вопреки нижеследующей теор. 2. Теор. 1 тоже легко опровергается при определении (1).

Мы предлагаем следующее изменение определений измеримости и интеграла: вместо l_n и k_n в условии (ii) и в равенстве (1), определяющем интеграл, пишется выражение $C2^n$, где C — натуральное число (не зависящее от n). Это обязывает нас внести соответствующие изменения в формулировки и доказательства последующих теорем.

54. (К стр. 91.) К сожалению, так определенные элементарные домены $W_{n,h}$, где n фиксировано, вообще говоря, не покрывают E. Чтобы соблюсти условие (ii) (с заменой V на W), можно определить элементарные домены $W_{n,h}$ равенствами

$$(*) \qquad W_{n,h} = \begin{cases} V_{n+1,\ 2h-1^*} \quad V_{n+1,\ 2h} & \text{при} \quad -C2^n < h \leqslant C2^n, \\ V_{n+1,\ 2h} & \text{при} \ h = -C2^n. \end{cases}$$

Тогда, однако, возникают трудности с условием (iii), связанные с точками домена $W_{n,h}$, о которых неизвестно, ни что они принадлежат $V_{n+1,\ 2h-1}$, ни что они принадлежат $V_{n+1,\ 2h}$. (См. следующий комментарий.)

55. (К стр. 91.) Трудности, о которых говорилось в предыдущем комментарии, при этом устраняются. Таким образом, осуществление условия $A_{n+1} \subseteq A_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) достижимо в два этапа: сначала мы так изменяем A_n, чтобы каждое A_n содержало границы всех $V_{n,h}$, затем переходим от A_n и $V_{n,h}$ к B_n и $W_{n,h}$ согласно равенствам (*) (см. предыдущий комментарий) и равенствам

$$B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k.$$

56. К стр. 93.) Вместо (6) имеем

$$(6') \qquad \sum_{h,k} |k\, 2^{-p-1} - h\, 2^{-n-1}|\, mY_{hk} < C2^{-n+1};$$

вместо (8) получаем

$$(8') \qquad \left| 2^{-p-1} \sum kmV_{pk} - 2^{-n-1} \sum hmV_{nh} \right| < (2C+1)\, 2^{-n}.$$

57. (К стр. 94.) Вместо этого получаем

$$\left| 2^{-n-1} \sum hmV_{nh} - 2^{-n-1} \sum kmV_{nk} \right| \leqslant 2^{-n-1} \left(\sum mX_{hk} + C2^{n+1} \sum mY_{hk} \right) \leqslant 2^{-n} + C2^{-n+1} = (2C+1)\, 2^{-n}.$$

58. (К стр. 94.) Кон. В конструктивном анализе предложение, совпадающее по формулировке с теор. 1, опровергается на примере [Заславский и Цейтин, 1962].

59. (К стр. 94.) Не видно, почему последнее предложение верно. Завершить доказательство теор. 1 (в интуиционистском анализе) можно следующим образом.

Пусть $V_{n,i} = V_n(x_i)$, где $x_i \in L_n$ ($i = 1, \ldots, m$). При каждом i находим целое число h_i, такое, что

$$(1) \qquad \left(h_i - \frac{5}{8}\right) 2^{-n-1} < f(x_i) < \left(h_i + \frac{5}{8}\right) 2^{-n-1}.$$

Для каждого i и для всякой точки $x \in V_{n,i} \cap L_n$ имеем

$$(h_i - 1)\, 2^{-n-1} < f(x) < (h_i + 1)\, 2^{-n-1}.$$

Пусть натуральное число M является верхней гранью для $|f(x)|$ и пусть $C = 2M + 2$. В силу (1) имеем $|h_i| < C2^n$ ($i = 1, \ldots, m$).

Положим

$$T_{n,\,h} = \begin{cases} \overset{*}{\bigcup\limits_{n_i = h}} W_{n,\,i} & \text{при } -C2^n \leqslant h < C2^n, \\ \hline E - \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{n,\,i} & \text{при } h = C2^n. \end{cases}$$

Тогда, как легко убедиться, функция f измерима посредством $\{T_{n,\,h}\}$ и $\{C_n\}$.

60. (К стр. 95.) Вместо этого неубедительного рассуждения предлагаем следующее доказательство.

Пусть f измерима посредством $\{V_{n,\,h}\}$ и $\{A_n\}$. Имеем $2^{-n} - mA_n > 0$ при всяком n. Так как $f(x) = g(x)$ почти всюду, то при всяком n может быть указана область B_n, такая, что $f(x) = g(x)$ на $E - B_n$ и что $mB_n < 2^{-n} - mA_n$. Тогда g измерима посредством $\{V_{n,\,h}\}$ и $\{A_n \cup B_n\}$. Равенство интегралов очевидно.

61. (К стр. 97.) Кон. В конструктивном анализе предложение, совпадающее по формулировке с теор. 1, опровергается на примере [Заславский и Цейтин, 1962].

62. (К стр. 97.) Происхождение этого неравенства непонятно.

63. (К стр. 97.) Этот вывод совершенно необоснован.

64. (К стр. 98.) Доказательство неубедительно не только ввиду ссылки на теорему о веерах (см. предыдущий комментарий). Приведем здесь поэтому исправленное интуиционистское доказательство теор. 1.

Для всякого m можно найти такое óбластное дополнение M_m, что $mM_m > 1 - 2^{-m-3}$ и что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ в каждой точке вида M_m; M_m содержит локализованное óбластное дополнение L_m, такое, что $mL_m > 1 - 2^{-m-2}$. Для каждой точки $x \in L_m$ можно найти натуральное число $N(x)$, такое, что $f_n(x)$ определено при $n > N(x)$ и что тогда $|f(x) - f_n(x)| < 2^{-m-3}$. В силу теор. 1 из 5.2.1 и теоремы о веерах, можно найти наибольшее значение $N(x)$ при $x \in L_m$.

Обозначим наибольшее значение $N(x)$ через N_1 и фиксируем $n > N_1$. При $x \in L_m$ имеем

(1) $$|f(x) - f_n(x)| < 2^{-m-3}.$$

Функция f_n измерима. Пусть она измерима посредством $\{V_{p,\,h}\}$ и $\{A_p\}$, где область A_p содержит при всяком p границы всех $V_{p,\,h}$. Что

касается пределов изменения индекса h, то пусть $|h| \leqslant (2M+2) 2^p$, где натуральное число M является общей верхней гранью абсолютных величин значений всех функций f_k. (Нетрудно видеть, что постоянная C в определении измеримости функции g всегда может быть взята равной $2M+2$, где M — натуральное число, являющееся верхней гранью для $|g(x)|$.) Пусть $L_m = E - B_m$, где B_m — область,

$$C_m = A_{m+2} \cup B_m,$$

$$K_m = E - C_m,$$

(2) $$W_{m,h} = V_{m+2,\,4h-2} \overset{*}{\cup} V_{m+2,\,4h-1} \overset{*}{\cup} V_{m+2,\,4h} \overset{*}{\cup} V_{m+2,\,4h+1}$$
$$(|h| \leqslant (2M+2)2^m),$$

где всякое $V_{m+2,k}$ с $|k| > (2M+2)\ 2^{m+2}$ рассматривается как обозначение для пустого вида.

В описанном построении m было произвольным натуральным числом. Область C_m и система элементарных доменов $\{W_{m,h}\}$ $(|h| \leqslant (2M+2)\ 2^m)$ могут быть таким образом построены для любого натурального числа m. Покажем, что $\{W_{m,h}\}$ и $\{C_m\}$ измеряют f.

Так как $\{V_{p,h}\}$ и $\{A_p\}$ измеряют f_n, то $mA_{m+2} < 2^{-m-2}$. Так как $mL_m > 1 - 2^{-m-2}$, то $mB_m < 2^{-m-2}$ и $mC_m < 2^{-m-1} < 2^{-m}$. Таким образом, для $\{W_{m,h}\}$ и $\{C_m\}$ выполнено (i).

Соблюдение (ii) вытекает из того, что $V_{m+2,k}$ $(|k| \leqslant (2M+2)2^{m+2})$ образуют простое покрытие E, а в правых частях равенств (2) каждое такое $V_{m+2,k}$ встречается ровно один раз.

Пусть теперь $x \in W_{m,h} \cap K_m$. Тогда $x \in E - A_{m+2}$, и так как A_{m+2} содержит границы всех $V_{m+2,k}$, то x принадлежит одному из элементарных доменов $V_{m+2,k}$, где

(3) $$4h-2 \leqslant k \leqslant 4h+1.$$

Кроме того, $x \in E - B_m$, т. е. $x \in L_m$, в силу чего имеет место (1). Так как $x \in V_{m+2,k} \cap (E - A_{m+2})$ и $f_n(x)$ определено, то

(4) $$(k-1)\ 2^{-m-3} \not> f_n\ (x) \not> (k+1)\ 2^{-m-3}.$$

Из (1), (3) и (4) следует, что

$$(h-1)\ 2^{-m-1} \not> f(x) \not> (h+1)\ 2^{-m-1}.$$

Таким образом, соблюдено и условие (iii).

Этим доказано, что f измерима посредством $\{W_{m,h}\}$ и $\{C_m\}$.

Из неравенства (8′) в доказательстве теор. 1 из 6.2.1 [см. комментарий 56] получаем путем перехода к пределу

$$\left| \int f_n(x)\,dx - 2^{-m-3} \sum kmV_{m+2,\,k} \right| \not> (4M+5)\,2^{-m-2}, \tag{5}$$

$$\left| \int f(x)\,dx - 2^{-m-1} \sum hm\ \ W_{m,\,h} \right| \not> (4M+5)\,2^{-m}. \tag{6}$$

В силу (2) имеем

$$mW_{m,\,h} = \sum_{k=4h-2}^{4h+1} mV_{m+2,\,k} \quad (|h| \leqslant (2M+2)\,2^m).$$

Отсюда

$$\left| 2^{-m-3} \sum km\,V_{m+2,\,k} - 2^{-m-1} \sum hmW_{m,\,h} \right| < 2^{-m-2}. \tag{7}$$

В силу (5), (6) и (7) имеем

$$\left| \int f(x)\,dx - \int f_n(x)\,dx \right| < (10M+13)\,2^{-m-1},$$

что верно при всяком $n > N_1$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx,$$

что и оставалось доказать.

65. (К стр. 98.) К о н. Не знаю, чем это определение лучше определения натурального числа l в начале нашей дискуссии (см. стр. 23—24, 162). В обоих случаях не указывается, как находить или строить определяемый предмет — в данном случае значение «функции» f_Q в точке x. Эта ваша функция, вообще говоря, не конструктивна, т. е. отсутствует алгорифм, вычисляющий ее значение в любой точке, где вы хотите его определить. Вы скажете, что функция f_Q определена вами не во всякой точке квадрата E, а лишь в точках вида $Q \cup (E - Q)$, который может не совпадать с E. Но невозможен алгорифм, вычисляющий $f_Q(x)$ во всякой точке *этого вида*, если только вид Q не пуст и не совпадает с E!

Поэтому ваше определение характеристической функции точечного вида не удовлетворяет меня. Не нравятся мне и основанные на этом определении дальнейшие определения — измеримости и меры точечного вида. Но, по-видимому, можно исправить дело, превратив вашу нижеследующую теорему 1 в определения этих вещей.

66. (К стр. 99.) Доказательство теор. 2 удобнее проводить, пользуясь теор. 1. Роль X_n будет тогда играть V_n. Доказательство,

приведенное в тексте, не убедительно, так как возможны непустые $W_{n,\,2^{n+1}-1}$ и $W_{n,\,2^{n+1}-1}$.

67. (К стр. 102.) Числа n_i мы берем так, чтобы соблюдались условия $n_i < n_{i+1}$.

68. (К стр. 102.) Мы пользуемся здесь теор. 6 и 2 из 6.3.2.

69. (К стр. 103.) Из этого доказательства видно, что и здесь в качестве k_p и l_p может быть взято число $C2^p$, где C — фиксированное для данной функции натуральное число.

70. (К стр. 103.) В частности, $\mathfrak{E}$ в доказательстве нижеследующей теор. 1 означает, по-видимому, трехмерный вид точек (x', x'', z), таких, что $(x', x'') \in E$ и что $|z| \leqslant M$, где M — верхняя грань рассматриваемой там функции f. В этом доказательстве предполагается, что все фигурирующие там трехмерные точечные виды содержатся в $\mathfrak{E}$.

71. (К стр. 104.) Здесь автор, по-видимому, забывает об элементарном домене $\mathfrak{A}_{1n,i_1}$, содержащемся в $\mathfrak{A}_{1,n}$. Ввиду этого неравенство $mD < 2^{-n-3}$ нельзя считать доказанным.

72. (К стр. 104.) Разделить таким образом E, вообще говоря, не будет возможно. Мы предлагаем вести доказательство следующим образом.

Пусть $\mathfrak{T}_1$ измерим посредством $\{\mathfrak{B}_{1,\,n}\}$ и $\{\mathfrak{A}_{1,\,n}\}$, где обозначения выбраны так, что $m\mathfrak{A}_{1,\,n} < 2^{-2n-7}$. Пусть $\mathfrak{A}_{1,\,n}$ определяется последовательностью элементарных доменов $\{\mathfrak{A}_{1,\,n,\,s}\}$. Для всякого натурального q выберем i_q, такое, что $m\mathfrak{A}_{1,\,n,\,i_q} > (1-2^{-2q-5})\, m\mathfrak{A}_{1,\,n}$. Полагая $\mathfrak{W}_{1,\,n,\,q} = \mathfrak{A}_{1,\,n,\,i_{q+1}} - \mathfrak{A}_{1n,i_q}$, будем иметь

$$m\mathfrak{W}_{1,\,n,\,q} < 2^{-2q-5} m\mathfrak{A}_{1,\,n} < 2^{-2n-2q-12}.$$

Для любого трехмерного вида $\mathfrak{X}$ и любой точки $x = (x', x'')$ на плоскости условимся обозначать через $\mathfrak{X}[x]$ вид чисел z, таких, что $(x', x'', z) \in \mathfrak{X}$. Виды $\mathfrak{W}_{1,\,n,\,q}\,[x]$ и $\mathfrak{A}_{1,n,i_1}\,[x]$ состоят из конечного числа промежутков. Обозначим через $X_{1,\,n,\,q}$ вид тех точек x, для которых $m\mathfrak{W}_{1,\,n,\,q}[x] \geqslant 2^{-n-q-4}$; через X_{1n} — вид тех точек x, для которых $m\mathfrak{A}_{1,\,n,\,i_1}[x] \geqslant 2^{-n-4}$. Имеем $mX_{1,\,n,\,q} < 2^{-n-q-s}$, $mX_{1,\,n} < 2^{-n-3}$. Вид $X_{1,\,n,\,q}$ можно включить в область $C_{1,\,n,\,q}$ с мерой меньшей, чем 2^{-n-q-7}; вид $X_{1,\,n}$ — в область $C_{1,\,n}$ с мерой меньшей, чем 2^{-n-2}. Положим

$$B_{1,\,n} = C_{1,\,n} \cup \bigcup_{q=1}^{\infty} C_{1,\,n,\,q}.$$

Тогда $mB_{1,n} < 2^{-n-1}$, и если $x \in E - B_{1,n}$, то $m\mathfrak{A}_{1,n}[x] < 2^{-n-4} + \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-n-q-4} = 2^{-n-3}$. Положим $M_{1n} = E - B_{1,n}$.

Элементарный домен $\mathfrak{B}_{1,n}$ представляет собой замыкание некоторого трехмерного рационального элементарного домена. Последний же есть вид рациональных точек, принадлежащих некоторым параллелепипедам $\mathfrak{P}_{n,k}$ ($k = 1, \ldots, r$) с рациональными вершинами и с ребрами, параллельными координатным осям. Проекцией каждого параллелепипеда $\mathfrak{P}_{n,k}$ является некоторый содержащийся в E прямоугольник $P_{n,k}$ с рациональными вершинами. Продолжая все стороны всех прямоугольников $P_{n,k}$ до пересечения с границей E, получим некоторое разбиение квадрата E на прямоугольники $Q_{n,l}$ ($l = 1, \ldots, t$), обладающее тем свойством, что всякий раз, когда какой-нибудь прямоугольник $Q_{n,l}$ имеет внутреннюю точку в каком-нибудь $P_{n,k}$, имеем $Q_{n,l} \subseteq P_{n,k}$. Прямоугольники $Q_{n,l}$ просто покрывают E.

Для всякой точки x_1, лежащей внутри $Q_{n,l}$, имеем, очевидно, $\mathfrak{B}_{1,n}[x] = \mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}]$, где $q_{n,l}$ — центр прямоугольника $Q_{n,l}$. Заметим также, что, как явствует из определения вида $\mathfrak{T}_1$, равенство

$$m\mathfrak{T}_1[x] = f^+(x) \tag{1}$$

имеет место в точке $x \in E$, коль скоро известно одно из двух: либо, что $f^+(x)$ определено; либо, что имеется точка $z \in \mathfrak{T}_1[x]$. $\mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}]$ является, очевидно, объединением конечного числа промежутков с рациональными концами ($l = 1, \ldots, t$); $m\mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}]$ является поэтому рациональным числом. Для каждого l найдем целое число $h = h(l)$ таким образом, чтобы соблюдались условия

$$(2h - 1)2^{-n-2} \leqslant m\mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}] \leqslant (2h + 1)\,2^{-n-2}. \tag{2}$$

Положим

$$Y_{n,h} = \overset{*}{\bigcup_{h(l)=h}} Q_{n,l}, \qquad (|h| \leqslant (4M + 4)\,2^n). \tag{3}$$

При всяком l ($1 \leqslant l \leqslant t$) имеем $\mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}] \subseteq [-M, M]$, так как $\mathfrak{B}_{1,n} \subseteq \mathfrak{C}$; отсюда

$$m\mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}] \leqslant 2M, \quad (2h(l) - 1)\,2^{-n-2} \leqslant 2M, \quad h(l) < (M + 1)\,2^{n+2}.$$

С другой стороны, $m\mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}] \geqslant 0$, откуда $h(l) \geqslant 0$. Таким образом,

$$|h(l)| \leqslant (4M + 4)\,2^n \qquad (1 \leqslant l \leqslant t).$$

Отсюда следует, что каждое $Q_{n,l}$ фигурирует в правой части одного из равенств (3). Ясно, что $Q_{n,l}$ встречается лишь в одном из этих ра-

венств. Следовательно, элементарные домены $Y_{n,h}$ просто покрывают квадрат E.

Построим теперь область F_n таким образом, чтобы она содержала границы всех $Q_{n,l}$ и чтобы соблюдалось условие $mF_n < 2^{-n-1}$. Положим

$$G_n = F_n \cup B_{1n}.$$

Покажем, что функция f^+ измерима посредством $\{Y_{nh}\}$ и $\{G_n\}$.

Так как $mB_{1,n} < 2^{-n-1}$ и $mF_n < 2^{-n-1}$, то имеем $G_n < 2^{-n}$. Таким образом, условие (i) выполнено для последовательности $\{G_n\}$. Условие (ii), как мы видели, тоже выполнено для $\{Y_{n,h}\}$.

Пусть теперь $x \in Y_{nh} \cap K_n$, где $K_n = E - G_n$. Имеем $x \in B_{1,n}$ и $x \in F_n$. Поэтому

(4) $$m\mathfrak{U}_{1,n}[x] < 2^{-n-3}$$

и x точка удалена от границ прямоугольников $Q_{n,l}$. С другой стороны, в силу (4)

$$x \in \overset{*}{\bigcup_{h(l)=h}} Q_{n,l}.$$

Поэтому может быть найдено l, такое, что $x \in Q_{n,l}$ и что $h(l) = h$. Точка x лежит внутри $Q_{n,l}$ и потому $\mathfrak{B}_{1,n}[x] = \mathfrak{B}_{1,n}[q_{n,l}]$. Отсюда в силу (2)

(5) $$(2h-1)2^{-n-2} \leqslant m\mathfrak{B}_{1,n}[x] \leqslant (2h+1)2^{-n-2}.$$

В силу (4) имеем далее:

$$(2h-1)2^{-n-2} - 2^{-n-3} < m\mathfrak{B}_{1,n}[x] - m(\mathfrak{B}_{1,n}[x] \cap \mathfrak{A}_{1,n}[x]),$$

$$(2h-1)2^{-n-2} - 2^{-n-3} < m(\mathfrak{B}_{1,n} - (\mathfrak{B}_{1,n} \cap \mathfrak{A}_{1,n}))[x].$$

Так как вид $\mathfrak{T}^+_1$ измерим посредством $\{\mathfrak{B}_{1,n}\}$ и $\{\mathfrak{A}_{1,n}\}$, то имеем

$$\mathfrak{B}_{1,n} - (\mathfrak{B}_{1,n} \cap \mathfrak{A}_{1,n}) = \mathfrak{B}_{1,n} \cap (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_{1,n}) = \mathfrak{T}_1 \cap (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}_{1,n}) = \mathfrak{T}_1 - (\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{A}_{1,n}).$$

Таким образом,

(6) $$(2h-1)2^{-n-2} - 2^{-n-3} < m(\mathfrak{T}_1 - (\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{A}_{1,n}))[x].$$

Так как $m\,\mathfrak{B}_{1,n}[x] \geqslant 0$, то в силу (5) имеем $h \geqslant 0$. Если $h \neq 0$, то $h > 0$, и в силу (6) имеем

$$m(\mathfrak{T}_1 - (\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{A}_{1,n}))[x] > 2^{-n-3}.$$

Согласно теор. 2 из 6.3.2 и королларию к теор. 2 из 6.1.2, может быть найдена точка $z \in (\mathfrak{T}_1 - (\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{A}_{1,n}))[x]$. Имеем $z \in \mathfrak{T}_1[x]$. Поэтому вид $\mathfrak{T}_1[x]$ измерим и имеет место равенство (1). Кроме того, имеем

$$m(\mathfrak{T}_1 - (\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{A}_{1,n}))[x] \not> m\,\mathfrak{T}_1[x],$$

и, следовательно, в силу (6) и (1)

$$(2h-1)2^{-n-2}-2^{-n-3}<f^{+}(x). \tag{7}$$

С другой стороны, имеем

$$m(\mathfrak{T}_1-(\mathfrak{T}_1\cap\mathfrak{A}_{1,n}))[x]=m\,\mathfrak{T}_1[x]-m(\mathfrak{T}_1\cap\mathfrak{A}_{1,n})[x],$$

откуда

$$m(\mathfrak{T}_1-(\mathfrak{T}_1\cap\mathfrak{A}_{1,n}))[x]\nless f^{+}(x)-2^{-n-3}.$$

Следовательно,

$$f^{+}(x)\ngtr m(\mathfrak{B}_{1,n}-(\mathfrak{B}_{1,n}\cap\mathfrak{A}_{1,n}))[x]+2^{-n-3}$$

$$\ngtr m\mathfrak{B}_{1,n}[x]+2^{-n-3}$$

$$\ngtr (2h+1)\,2^{-n-2}+2^{-n-3}. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) вытекает, что

$$(h-1)2^{-n-1}<f^{+}(x)<(h+1)\,2^{-n-1}.$$

Те же неравенства мы аналогичным образом получаем и при $h=0$, предполагая, что $f^{+}(x)$ определено. Таким образом, соблюдено условие (iii). Следовательно, функция f^{+} измерима посредством $\{Y_{n,h}\}$ и $\{G_n\}$.

Далее доказательство измеримости функции f ведется, как в тексте, начиная со слов «Точно так же, исходя из $\mathfrak{T}_2$» (стр. 104).

73. (К стр. 105.) Эта часть доказательства теор. 1 из 6.4 также требует исправлений. Мы предлагаем определить $\mathfrak{B}_n$ как вид точек (p_1, p_2, p_3), таких, что $(p_1, p_2)\in A_n$ и что $|p_3|\ngtr M$, где M — верхняя грань $|f(x)|$ (см. комментарий 70); $\mathfrak{C}_n$ — как вид точек (p_1, p_2, p_3), таких, что $(p_1, p_2)\in E$ и что $|p_3|<2^{-n}$. Определяя затем $\mathfrak{D}_n$, как в тексте, будем иметь $m\mathfrak{D}_n<(2M+3)2^{-n}$. $\mathfrak{F}_n$ может быть построено как область, содержащая $\mathfrak{D}_n$ и такая, что $m\mathfrak{F}_n<(2M+3)2^{-n+1}$. $\mathfrak{U}_{1,n}$ может быть определено как вид тех точек (p_1, p_2, p_3), для которых имеется $h>0$, такое, что $(p_1, p_2)\in V_{n,h}$ и что $0\ngtr p_3\ngtr(h-1)2^{-n-1}$; $\mathfrak{U}_{2,n}$ — как вид тех точек (p_1, p_2, p_3), для которых имеется $h<0$, такое, что $(p_1, p_2)\in V$ и что $0\nless p_3\nless(h+1)2^{-n-1}$. При таком построении видов $\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{U}_{1,n}$ и $\mathfrak{U}_{2,n}$ читатель сможет доказать равенства $\mathfrak{U}_{1,n}\cap(\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_n)=\mathfrak{T}_1\cap(\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_n)$ и $\mathfrak{U}_{2,n}\cap(\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_n)=\mathfrak{T}_2\cap(\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_n$ и выделить из последовательностей $\{\mathfrak{U}_{1,n}\}$ и $\{\mathfrak{F}_n\}$ подпоследовательности, измеряющие $\mathfrak{T}_1$, а из последовательностей $\{\mathfrak{U}_{2n}\}$ и $\{\mathfrak{F}_n\}$ — подпоследовательности, измеряющие $\mathfrak{T}_2$.

74. (К стр. 105.) У нас, согласно предыдущему комментарию, получается вместо этого равенства равенство

$$m\mathfrak{U}_{1,n} - m\mathfrak{U}_{2,n} = 2^{-n-1} \sum_{h} hmV_{n,h} - 2^{-n-1} \sum_{h>0} mV_{n,h} + 2^{-n-1} \sum_{h<0} mV_{n,h},$$

дающее в пределе требуемый результат.

75. (К стр. 107.) Приведем более подробное изложение этого доказательства.

Из того, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{1}$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n^+(x) = f^+(x),$$

и отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty} {}_k(f_n^+)\,(x) = {}_k(f^+)\,(x) \tag{2}$$

при любом натуральном k. Ввиду измеримости функций f_n функции f_n^+ $(n = 1, 2, \ldots)$ измеримы и при любом натуральном k функции ${}_k(f_n^+)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ измеримы и ограничены в совокупности. Так как равенство (2), как и равенство (1), имеет место почти всюду, то функция ${}_k(f^+)$ измерима согласно теор. 1 из 6.2.4. Следовательно, функция f^+ измерима. Аналогично доказывается измеримость функции f^-. Следовательно, функция f измерима.

76. (К стр. 107.) Под ${}_lf^-(x)$ здесь и в дальнейшем подразумевается $\max(f^-(x), -2^l)$, что равно $-{}_l(-f^-)(x)$.

77. (К стр. 109.) Неизвестно, откуда автор получает последнее неравенство. Можно, однако, заменить последние фразы следующим текстом.

Индекс h в системе $\{V_{p,h}\}$ подчинен условию $|h| \leqslant C2^p$, где C — независимое от p натуральное число. Выберем p таким образом, чтобы это натуральное число (кроме двух вышеприведенных) удовлетворяло условию $2^{p+k-n-1} > C+1$. При $h \neq 0$ и $x \in V_{p,h} \cap (E - A_p)$ имеем $0 \ngtr {}_kf(x) \ngtr (h+1)\,2^{-p-1}$, откуда $h \geqslant -1$. Следовательно, виды $V_{p,h} \cap (E - A_p)$, где $h < -1$, пусты, т. е. имеем $V_{ph} \subseteq E - (E - A_p)$ при $h < -1$. Согласно следствию теор. 1 из 6.3.2,

имеем поэтому

$$\sum_{h<-1} mV_{p,h} < 2^{-p}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{h<-1} h\cdot mV_{p,h} \not< -C2^{p}\cdot \sum_{h<-1} mV_{p,h}.$$

Следовательно,

$$\sum_{h<-1} hmV_{p,h} > -C.$$

Полагая

$$l = 2^{p+k+1} - 1,$$

будем иметь

$$\sum_{h} hmV_{p,h} > -C - mV_{p,-1} + 2^{p+k+1} \sum_{h\geqslant l} mV_{p,h} - \sum_{h\geqslant l} mV_{p,h}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$mV_{p,-1} + \sum_{h\geqslant l} mV_{p,h} \leqslant 1,$$

получаем

$$\sum_{h} hmV_{p,h} > -C - 1 + 2^{p+k+1} \sum_{h\geqslant l} mV_{p,h}.$$

Пользуясь далее оценкой левой части этого неравенства через s, третьим условием, наложенным на p, и условием $(s+1)2^{-k} < 2^{-n-2}$, получаем

$$\sum_{h\geqslant l} mV_{p,h} < 2^{-n-1}.$$

Поэтому можно включить вид $\overset{*}{\bigcup\limits_{h\geqslant l}} V_{ph}$ в область C_p с мерой меньшей, чем 2^{-n-1}.

При $x \in E - (A_p \cup C_p)$ находим h, такое, что $x \in V_{p,h}$ $h < l$, так как $x \notin \overset{*}{\bigcup\limits_{h\geqslant l}} V_{p,h}$. Если при этом определено ${}_kf(x)$ [т. е. определено $f(x)$], то имеем

$${}_kf(x) \not> (h+1)2^{-p-1},$$

причем $(h+1) < 2^{p+k+1}$. Таким образом, имеем тогда ${}_kf(x) < 2^{k}$, и потому

$$(*) \qquad {}_kf(x) = f(x).$$

Этим мы доказали, что равенство (*) имеет место во всякой точке x вида $E - (A_p \cup C_p)$, в которой определена правая часть этого равенства.

78. (К стр. 109.) В качестве q может быть, например, взято целое число

$$[(h - h' - 2)2^{-p+n}] + 1,$$

где квадратные скобки означают взятие целой части.

79. (К стр. 109.) Если h в системе $\{V_{p,h}\}$ подчинено условию $|h| \leqslant C2^p$, а h' в системе $\{W_{p,h'}\}$ — условию $|h'| \leqslant C'2^p$ (C и C' — натуральные числа, независимые от p), то q в системе $\{X_{n,q}\}$ можно подчинить условию $|q| \leqslant C''2^n$, где

$$C'' = C + C' + 1$$

(см. предыдущий комментарий).

80. (К стр. 111.) Вместе с тем, как нетрудно видеть, ${}_kf(x)\cdot f_G(x) = \min f(x) f_G(x),\ 2^k$ во всякой точке x, в которой хотя бы одна часть этого равенства определена. Следовательно, функция $f(x) f_G(x)$ измерима.

81. (К стр. 112.) Пункт (ii) этого доказательства содержит погрешности, которые читатель легко обнаружит и исправит (см. комментарий 76).

82. (К стр. 113.) Приведенное доказательство годится лишь для неотрицательных функций f_n.

83. (К стр. 116.) Кон. Мне не нравится ваша функция g (см. комментарий 65). Нельзя ли обойтись без нее?

84. (К стр. 117.) Здесь p — произвольное натуральное число. Числа N_p берутся так, чтобы они образовывали возрастающую последовательность.

85. (К стр. 124.) Так называются переменные для математических предложений.

86. (К стр. 125.) Кон. Ваш пример неудачен, так как есть основания признавать формулу $a \neq b \to a \# b$ (Шанин, 1958, 1962). Я с вами, однако, вполне согласен в том, что формулу $\neg q \to \neg p \cdot \to \cdot p \to q$ нельзя считать истинной. В самом деле, с ее «помощью» можно было бы из вашей истинной формулы (4) (стр. 125) получить заведомо непригодную формулу $\neg\neg p \to p$.

87. (К стр. 130.) Кон. В конструктивной математической логике импликация

$$(*) \qquad (\forall x)\neg\neg p(x) \to \neg\neg(\forall x)\, p(x)$$

весьма просто опровергается на примере. Строится *неразрешимый* предикат $\mathfrak{q}$ от одной переменной, пробегающей натуральный ряд, т. е. такой предикат $\mathfrak{q}$, что невозможен алгорифм, распознающий для любого натурального числа n, верно ли $\mathfrak{q}(n)$. Современная теория алгорифмов дает разнообразные способы построения таких предикатов. Например, $\mathfrak{q}(n)$ может выражать применимость надлежащим образом построенного алгорифма к числу n. После того как $\mathfrak{q}$ построен, берем в качестве $\mathfrak{p}(x)$ предикат $\mathfrak{q}(x) \vee \neg \mathfrak{q}(x)$. Левая часть импликации (*) верна при подстановке $\mathfrak{p}(x)$ вместо $p(x)$ в силу вашей формулы (9) из 7.1.2, с которой я, разумеется, согласен. С другой стороны, предложение $(\forall x)\,\mathfrak{p}(x)$, т. е. $(\forall x)\,(\mathfrak{q}(x) \vee \neg \mathfrak{q}(x))$, согласно конструктивному пониманию общих предложений, выражает осуществимость алгорифма, применимого к любому натуральному числу n и распознающего, верно ли $\mathfrak{q}(n)$. А такой алгорифм как раз не осуществим. Следовательно, предложение $(\forall x)\,\mathfrak{p}(x)$ ложно, т. е. верно $\neg(\forall x)\,\mathfrak{p}(x)$ и ложно $\neg\neg(\forall x)\,\mathfrak{p}(x)$. Вот мы и опровергли формулу (*). При этом мы не прибегали к вашей теореме о веерах. [Ср. Клини, 1945.]

88. (К стр. 131.) Кон. Ввиду только что сказанного мною предположение Куроды кажется мне очень странным. Оно во всяком случае совершенно не согласуется с моим пониманием логических связок. Ведь опровержение формулы $(\forall x)\neg\neg p(x) \to \neg\neg(\forall x)p(x)$ проведено нами в самом «исчислимо бесконечном» виде — в натуральном ряде.

89. (К стр. 133.) Кон. Но ведь главу 8, содержащую раздел 8. 1.1, вы сами озаглавили «Спорные вопросы» («Controversial subjects»).

90. (К стр. 140). См. стр. 434 русского перевода.

91. (К стр. 142.) К сожалению, система S описана автором недостаточно ясно, из-за чего теорема 4 оказывается непонятной.

92. (К стр. 144.) Кон. Это мне совсем непонятно. Если уж пошло на то, чтобы рассматривать «числовой генератор» a, то из равенства $a = 0$ следует лишь, что ни предложение $\neg\mathfrak{p}$, ни предложение $\neg\neg\mathfrak{p}$ *никогда не будут доказаны*. Но это вовсе не будет означать, что они *недоказуемы*. Вполне мыслимо, что одно из этих предложений даже довольно легко доказуемо, однако человечество всегда будет находить дела более важные, чем поиски доказательства этого предложения. Я поэтому не могу считать обоснованным неравенство $a \neq 0$.

Впрочем, я здесь вышел за пределы своей области. Ведь «числовой генератор» a, определенный вами, никоим образом не является конструктивным объектом. Поэтому я, собственно говоря, ничего вообще не должен был бы говорить о нем. Считайте, пожалуйста, мои высказывания о ЧГ a смелой вылазкой конструктивиста на неконструктивную территорию.

93. (К стр. 144.) Кон. Вот как выгодно бывает отсутствие информации!

94. (К стр. 145.) Кон. Ваши неудачные попытки опровергнуть импликацию $a \neq 0 \rightarrow a \# 0$ лишь укрепили меня в моем глупом убеждении, что она истинна.

95. (К стр. 146.) Кон. Почему $a \dot{>} 0$, это Аллах ведает!

96. (К стр. 146.) Кон. По-видимому, вы хотите сказать, что неравенство $a(f) \neq 0$ доказывается аналогично тому, как в предыдущем рассуждении доказывалась формула $a \dot{>} 0$. Оба эти доказательства мне совершенно непонятны. Я хочу, наоборот, доказать, что, согласно вашему определению, $a(f) = 0$. В самом деле, в момент, когда определяется $a_{n+1}(f)$, нам известны лишь f_i, где $i \leqslant n$. Прочие f_i выбираются после определения $a_{n+1}(f)$. Имея же лишь f_i с $i \leqslant n$, мы не можем судить о том, иррационально ли f, т. е. испытывать $\mathfrak{p}(f)$. Это предложение, таким образом, не испытано в момент определения $a_{n+1}(f)$, в силу чего $a_{n+1}(f) = 2^{-n-1}$. Так как это верно при всяком n, то $a(f) = 0$.

97. (К стр. 147.) Кон. Наоборот, я могу доказать, что $b(f) = 0$ (см. предыдущий комментарий). Ваше доказательство, таким образом, неубедительно.

98. (К стр. 147.) Кон. Так формулируемое предложение имеет место и в конструктивном анализе [Шанин, 1962].

99. (К стр. 148.) Не совсем понятно, что автор понимает здесь под «евклидовой геометрией плоскости».

100. (К стр. 148.) Кон. Не понимаю, почему вы считаете, что при $c = 0$ предложение $\mathfrak{p}$ никогда не может быть испытано. По-моему, все, что можно сказать в этом случае, это что предложение $\mathfrak{p}$ никогда не будет испытано, а это совсем другое дело. Это нисколько не «противоречиво».

101. (К стр. 148.) Кон. Как я уже имел удовольствие отметить (см. комментарий 30), в конструктивном анализе опровергается на примере не только предложение, совпадающее по формулировке с (C), но и более слабое предложение, совпадающее по формулировке с вашей теор. 2 из 3.4.4. При этом не привлекаются никакие последовательности, связанные с ходом развития математики.

БИБЛИОГРАФИЯ К КОММЕНТАРИЯМ

Гейтинг (Heyting A.)

1955. Some remarks on intuitionism. *Constructivity in mathematics Proceedings of the colloquium held at Amsterdam*, 1957, 69—71.

Заславский И. Д.

1962. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, LXVII, *Проблемы конструктивного направления в математике*, **2**, М.— Л., 385—457.

Заславский И. Д., Цейтин Г. С.

О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, LXVII, *Проблемы конструктивного направления в математике*, **2**, М.— Л., 458—502.

Клини (Kleene S.)

1945. On the interpretation of intuitionistic number theory, *Journal of Symbolic logics*, **10**, 109—124.

Марков А. А.

1954. О непрерывности конструктивных функций, *Успехи матем. наук*, IX, **3** (61), 226—230.

1958. О конструктивных функциях. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, LII, *Проблемы конструктивного направления в математике*, **1**, М.— Л., 317—348.

1962. О конструктивной математике. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, LXVII, *Проблемы конструктивного направления в математике*, **2**, М.— Л., 8—14.

Цейтин Г. С.

1962. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, LXVII, *Проблемы конструктивного направления в математике*, 2, М.— Л., 295—360.

Чёрч (Church A.)

1936. A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic logics*, 1, 101—102.

Шанин Н. А.

1958. О конструктивном понимании математических суждений. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, LII, *Проблемы конструктивного направления в математике*, 1, М.— Л., 226—312.

1962. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. *Труды математического института им. В. А. Стеклова*, LXVII, *Проблемы конструктивного направления в математике*, 2, М.— Л., 15—294.

Шпекер (Specker E.)

1949. Nicht Konstruktiv Beweisbare Sätze der Analysis. *Journal of Symbolic logics*, 14, 145—158.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

А. Гейтинг

ИНТУИЦИОНИЗМ

Редактор *Н. Н. Щербиновская*
Художник *Н. А. Усачев*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*
Корректор *О. К. Румянцева*

Сдано в производство 3/VIII 1964 г. Подписано к печати 2/III 1965 г.
Бумага 84×108$^1/_{32}$=3,10 бум. л. 10,25 печ. л. Уч.-изд. л. 9,42.
Изд. № 1/1668. Цена 66 к. Зак. 1030
Темплан 1964 г. изд-ва «Мир» пор. № 23

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2
2-я тип. издательства «Наука». Москва

БИБЛИОТЕКА

СБОРНИКА МАТЕМАТИКА

Вышли из печати

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
31	17 св.	a^{-11}).	$a^{-1\ 11}$).
38	9 сн.	$r\Gamma$	$Ч\Gamma$
38	8 сн.	$r\Gamma$	ЧГ
46	16 сн.	, то допустима,	допустима, то
64	11 св.	Крамер	Крамера
90	1 сн.	$-ln$	$-l_n$
97	12 св.	2^{-1}	2^{-m-1}
175	15 сн.	$б_j$	b_j
176	12 сн.	$p-q\|$	$\|p-q\|$
177	2 св.	$p-p_n\|$	$\|p-p_n\|$
177	2 сн.	$\|r-p_{n+2}\| \ngtr 3\times$ $\times 2^{-n-3}p_{n+2}$	$\|r-p_{n+2}\| \ngtr 3\times$ $\times 2^{-n-3}\cdot p_{n+2}$
178	15 сн.	$mA+2^{-k}u;$	$mA+2^{-k}$; и

ная
пе-
бру.
гео-
ия.
од-
вы-
ий.
кой
рх-
на
:мы

АГМОН С., ДУГЛИС А., НИРЕНБЕРГ Л., Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.

Теория алгебр Ли. Топология групп Ли.

ХАНТ Дж. А., Марковские процессы и потенциалы.

ХЁРМАНДЕР Л., Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига.

ВАН ХАО, МАК-НОТОН Р., Аксиоматические системы теории множеств.

ХОЛЛ М., Комбинаторный анализ.

Сдано в производство 3/VIII 1964 г. Подписано к печати 2/III 1965 г.
Бумага 84×108$^{1}/_{32}$=3,10 бум. л. 10,25 печ. л. Уч.-изд. л. 9,42.
Изд. № 1/1668. Цена 66 к. Зак. 1030
Темплан 1964 г. изд-ва «Мир» пор. № 23

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2
2-я тип. издательства «Наука». Москва

БИБЛИОТЕКА

СБОРНИКА

МАТЕМАТИКА

Вышли из печати

МИКУСИНСКИЙ Я., СИКОРСКИЙ Р., **Элементарная теория обобщенных функций. Вып.** I, II.

ХЁРМАНДЕР Л., **К теории общих дифференциальных операторов в частных производных.**

ХАЛМОШ П. Р., **Лекции по эргодической теории.**

КАПЛАНСКИЙ И., **Введение в дифференциальную алгебру.**

КАРЛЕМАН Т., **Математические задачи кинетической теории газов.**

ХЕЙМАН В. К., **Многолистные функции.**

НОМИДЗУ К., **Группы Ли и дифференциальная геометрия.**

СУДЗУКИ М., **Строение группы и строение структуры ее подгрупп.**

РУТИСХАУЗЕР Г., **Алгоритм частных и разностей.**

ИТО К., **Вероятностные процессы.** Вып. I, II.

ГРЕНАНДЕР У., **Случайные процессы и статистические выводы.**

ГОРДИНГ Л., **Задача Коши для гиперболических уравнений.**

ГУДСТЕЙН Р. Л., **Математическая логика.**

ДЭЙ М. М., **Нормированные линейные пространства.**

ГРОТЕНДИК А., **О некоторых вопросах гомологической алгебры.**

АЛЬФОРС Л., БЕРС Л., **Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения.**

ЛЕРЕ Ж., **Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.**

МАНДЕЛЬБРОЙТ С., **Теоремы замкнутости и теоремы композиции.**

АГМОН С., ДУГЛИС А., НИРЕНБЕРГ Л., **Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.**

Теория алгебр Ли. Топология групп Ли.

ХАНТ Дж. А., **Марковские процессы и потенциалы.**

ХЁРМАНДЕР Л., **Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига.**

ВАН ХАО, МАК-НОТОН Р., **Аксиоматические системы теории множеств.**

ХОЛЛ М., **Комбинаторный анализ.**

66 к.

ЗОЙТЕНДЕЙК Г., **Методы возможных направлений.**

БОТТЕНБРУХ Г., **Структура АЛГОЛ-60 и его использование.**

Некоторые вопросы теории приближений.

ВОЗЕНКРАФТ Дж., РЕЙФФЕН Б., **Последовательное декодирование.**

НОСИРО К., **Предельные множества.**

БРЕЛО М., **Основы классической теории потенциала.**

ШВАРЦ Л., **Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике.**

ХУА ЛО-ГЕН, **Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел.**

ШВАРЦ Л., **Комплексные аналитические многообразия. Дифференциальные уравнения эллиптического типа.**

БЕРГМАН С., **Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными.**

МАККИ Дж., **Лекции по математическим основам квантовой механики.**

МИЛНОР Дж., **Теория Морса.**

ТРЕВ Ж., **Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами.**

Находятся в печати

ХЕДИНГ Дж., **Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ).**

Готовятся к печати

ГАЛЛАГЕР Р., **Коды с малой плотностью проверок на четность.**

КОКС Д., СМИТ У., **Теория очередей.**

ЛЕНГ С., **Алгебраические числа.**

МАССЕЙ Дж., **Пороговое декодирование.**

РАЙЗЕР Г. Дж., **Комбинаторная математика.**

СИГАЛ И., **Лекции по математическим методам в квантовой теории полей.**

Вниманию покупателей!

Предварительные заказы на печатающиеся книги принимают магазины Книготорга и потребительской кооперации.

Предварительные заказы оформляются в книжных магазинах на почтовой открытке.

По мере поступления литературы в книжный магазин покупатели извещаются по почте.

Своевременно оформляйте предварительные заказы на интересующие вас книги.